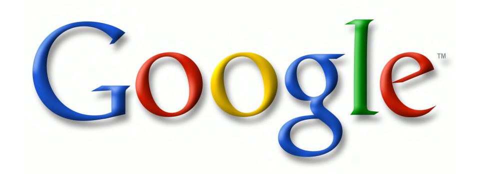




Theorie der Elektrizität und des Magnetismus

von

Prof. Dr. J. Classen

I. Band

Elektrostatik und Elektrokinetik



umf ... :lich
ang ... ızel-
dar: ... ınd-
lag(... den.
Die ... für
den ... ıern,
die ... ıter-
rich ... lern
eigı ... ium,
beh ... abei
wir(... ech-
nik(... asse
Re(

Wenden!

Sammlung Schubert XLI

Theorie der Elektrizität und des Magnetismus

von

Dr. J. Classen
Professor am physikalischen Staatslaboratorium zu Hamburg

I. Band

Elektrostatik und Elektrokinetik

Mit 21 Figuren

Leipzig
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1903

Vorwort.

In einer Theorie der Elektrizität ist es nicht möglich, zunächst einen größeren Teil für sich herauszugreifen, für den aus einer Reihe einfacher Erfahrungstatsachen sich ein eindeutiger mathematischer Ansatz ableiten ließe, derart, daß aus demselben für ein ganzes, umfangreiches Gebiet die Erscheinungen sich vorausberechnen ließen, wie dies für die mathematische Optik möglich war (siehe diese Sammlung Band 40). Bei jeder Gruppe von Elementarversuchen, von denen man ausgeht, ist stets noch irgend eine hypothetische Ergänzung erforderlich, bevor man zu einer mathematischen Theorie gelangen kann. Es ist nun für den wissenschaftlichen Wert einer Theorie von größter Bedeutung, daß das Hypothetische in derselben stets klar getrennt bleibt von dem durch die Erfahrung selbst gegebenen, und daß durch die Art der eingeführten Hypothese der Theorie keine größere Beschränkung auferlegt wird, als unbedingt zur Fixierung der Begriffe geboten ist.

Es war danach bei der Bearbeitung dieser Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus zunächst zu entscheiden, von welchem Ausgangspunkte aus die Entwickelung beginnen sollte. Entgegen dem alten Herkommen hat man neuerdings wiederholt mit Erfolg versucht, die Lehre vom Magnetismus an die Spitze zu stellen, an Stelle der Elektrostatik, z. B. Ebert*) und Drude**). Es hat dies den Vorteil, daß die magnetischen Kraftlinien, die gegenwärtig im Mittelpunkt der technischen Anwendungen stehen, auch die Grundlage des ganzen Systems bilden. Vom rein wissenschaftlichen Standpunkte sind jedoch die elektrostatischen und die magnetischen Kraftlinien genau gleichwertig zu behandeln. Welche von beiden man zuerst darstellt, sollte daher ohne Rücksicht

*) K. Ebert, Magnetische Kraftfelder.

**) P. Drude, Physik des Äthers.

auf die praktische Anwendung aus der Sache selbst entschieden werden, und da schließt sich der Verfasser der Ansicht Föppls*) an, daß die Elektrostatik wegen ihrer größeren Vielseitigkeit und doch auch größeren Einfachheit voranzustellen ist. In der Elektrostatik können wir wahre Quellpunkte der Kraftlinien scharf unterscheiden von den nur scheinbaren Ladungen freier Elektrizität an der Trennungsfläche zweier Dielektrika. Beim Magnetismus dagegen haben wir es stets nur mit der letzteren Art der Magnetisierung zu tun, während der sogenannte wahre Magnetismus fehlt, und darin scheint mir gerade für eine erste Einführung in diese Begriffe eine Erschwerung zu liegen; die erstmalige Unterscheidung der Begriffe Kraftlinien und Induktionslinien scheint bei der Elektrostatik leichter als beim Magnetismus. Außerdem bietet das Voranstellen der Elektrostatik den Vorteil, daß man nun auch über die elektrischen Ströme eine Menge von Gesetzen ableiten kann, ohne deren magnetische Eigenschaften zu kennen, während bei der ersten Darstellung des Stromes als Wirbel magnetischer Kraft in diesen Begriff bereits Eigenschaften aufgenommen werden, die zur Entwickelung des Ohmschen und der Kirchhoffschen Gesetze, sowie der chemischen und thermischen Eigenschaften der Ströme nicht nötig sind.

Freilich haben die magnetischen Kraftlinien den Vorzug, durch die Figuren von Eisenfeilicht der Anschauung außerordentlich nahe gebracht zu werden; es kommt daher sehr auf die Darstellung an, wenn man auch für die Elektrostatik ein ähnlich deutliches Bild schaffen will.

Für die Art der Darstellung lag die Frage nahe, ob es nicht das zweckmäßigste ist, bei einer solchen Neubearbeitung von vornherein die Vektorenrechnung einzuführen, und, wie Föppl es tut, ein besonderes Kapitel über das Rechnen mit Vektoren voranzuschicken. Daß dies hier nicht geschehen ist, geschah auf Grund folgender Überlegung: Der wesentliche Vorteil der Vektorenrechnung für die Theorie der Elektrizität liegt darin, daß in ihr die Begriffe des Vektorflusses, der Divergenz, des Curls und auch des Linienintegrals von selbst in der Art hervortreten, wie sie in den elektrischen Problemen so wesentlich sind. Begründet man

*) Föppl, Die Maxwellsche Theorie.

nun diese Begriffe zunächst in einem rein mathematischen Kapitel, so bleiben sie für den Anfänger zunächst noch leere mathematische Konstruktionen, denen es schwer ist, das Interesse abzugewinnen, das sie später verdienen; es ist daher hier ein anderer Weg eingeschlagen.

Im ersten Kapitel werden zunächst eine Reihe von einfachen Erfahrungen mitgeteilt, die sich durch bestimmte Versuchsanordnungen jederzeit prüfen lassen. Hier wird bereits festgestellt, daß sich experimentell bestimmte Niveauflächen und Induktionslinien ermitteln lassen. Im zweiten Kapitel wird dann die eine mathematische Hypothese an die Spitze gestellt, daß der Querschnitt der Induktionsröhren stets umgekehrt proportional der Induktion selbst ist; aus dieser Hypothese folgt dann unmittelbar, daß die ganze Verteilung im elektrischen Felde sich darstellen läßt durch das Bild des Strömens einer inkompressiblen Flüssigkeit. Es wird dann dieses Bild zunächst weitgehend entwickelt, genau wie Maxwell es in seinem berühmten Aufsatz „über Faradays Kraftlinien"*) getan hat, und so werden bereits eine Fülle von Sätzen gewonnen, die sich jetzt leicht auf die elektrischen Erscheinungen übertragen lassen.

Die im dritten Kapitel entwickelte rein mathematische Theorie baut sich dann leicht mit Hilfe der durch das eben behandelte Bild gewonnenen Anschauung auf, und nun tritt wie von selbst die Divergenz, der Vektorfluß und das Linienintegral oder Potential in den Vordergrund.

In einem vierten Kapitel werden noch die elektrostatischen Maße abgeleitet, und damit ist dann die eigentliche Grundlage geschaffen.

Bevor jetzt jedoch eine Weiterentwickelung der Theorie unternommen wird, wird noch einmal Halt gemacht und gewissermaßen Rückschau gehalten. Es hatten sich zum Aufbau der Theorie drei Grundannahmen als erforderlich gezeigt; die erste ist bereits genannt, sie ist rein mathematisch und bezieht sich auf die Größe der Induktion im Verhältnis zum Querschnitt der Induktionsröhren, die zweite bezieht sich auf die Art, wie die Verschiedenheiten der Dielektrika in Rechnung gesetzt sind, die dritte enthält eine Vorstellung über die Verteilung der Energie des elektrischen

*) Ostwalds Klassiker 69.

Feldes auf die einzelnen Gebiete. Im fünften Kapitel werden diese drei Grundannahmen nacheinander mit dem vorliegenden Erfahrungsmaterial verglichen.

Das sechste und siebente Kapitel enthalten dann den weiteren Ausbau der Theorie, und das achte behandelt noch im besonderen die elektrostatischen Messungen.

Der zweite Teil behandelt die Erscheinungen der strömenden Elektrizität, ohne Rücksicht auf die magnetischen Eigenschaften derselben. Der Gedankengang in der Darstellung ist ganz analog wie im ersten Teil, erst werden einige Grundversuche beschrieben, dann wird ein Bild derselben gewonnen durch Erweiterung des hydrodynamischen Bildes im ersten Teile; und darauf baut sich die Theorie der stationären Ströme auf. Wiederum wird in einem besonderen Kapitel die Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung versucht. Als eine Fortsetzung dieser Vergleichung sind auch die beiden letzten Kapitel anzusehen über die elektrochemischen und die thermoelektrischen Erscheinungen. Besonders bei den elektrochemischen Vorgängen lag die Versuchung nahe, weit mehr auf die Fülle von Einzelheiten einzugehen, doch schien mir dies zu weit aus dem Rahmen einer Theorie der Elektrizität herauszuführen und verdient vielleicht mehr, in eine besondere Behandlung thermochemischer Erscheinungen verwiesen zu werden.

Was die Darstellungsweise anbetrifft, so wird vielleicht besonders diejenige des zweiten und dritten Kapitels als schwerer verständlich empfunden werden, als man in einer älteren Darstellungsweise, die von den Coulombschen Fernkräften ausgeht, gewohnt ist; doch habe ich geglaubt, diese Schwierigkeit nicht umgehen zu dürfen, da nur so eine direkte Einführung in die Faraday-Maxwellsche Denkweise möglich ist. Sobald uns erst einmal dies ganze Begriffsystem vertrauter geworden ist, und die Vorstellungen der Fernwirkungen völlig in den Hintergrund gedrängt sind, dürfte auch in dieser Behandlungsweise eine besondere Schwierigkeit gar nicht mehr gefunden werden.

Beim Lesen der Korrekturen wurde ich durch Herrn Professor Grimsehl in dankenswertester Weise unterstützt.

Hamburg 1903.

Classen.

INHALTS-VERZEICHNIS.

I. Teil: Elektrostatik.

Erstes Kapitel. Die Grunderscheinungen der Elektrostatik.

Zweites Kapitel. Ein Vergleich aus der Hydrodynamik.

Drittes Kapitel. Die mathematischen Prinzipien der Elektrostatik.

Viertes Kapitel. Das elektrostatische Maßsystem.

Fünftes Kapitel. Bestätigung der Theorie durch die Erfahrung.

Sechstes Kapitel. Weiterentwickelung der Theorie.

Siebentes Kapitel. Energie eines Systems von Leitern.

Achtes Kapitel. Elektrostatische Messungen.

II. Teil: Elektrokinetik.

Neuntes Kapitel. Vorgänge bei der Änderung des elektrischen Feldes.

Zehntes Kapitel. Erweiterung des hydrodynamischen Bildes.

Elftes Kapitel. Stationäre elektrische Ströme.

Zwölftes Kapitel. Bestätigung der Theorie durch die Erfahrung.

Dreizehntes Kapitel. Die elektrochemischen Vorgänge.

Vierzehntes Kapitel. Thermoelektrizität.

I. Teil.
Elektrostatik.

Erstes Kapitel.
Die Grunderscheinungen der Elektrostatik.

§ 1. Erzeugung von Elektrizität durch Reibung. Zwei Arten von Elektrizität.

Gewisse Körper gewinnen durch Reiben aneinander die Eigenschaft, leichte Körperchen anzuziehen. Man bezeichnet diese Eigenschaft damit, daß man sagt, die Körper sind elektrisch geworden, oder sie sind elektrisch geladen. Die bekanntesten derartigen Körper sind Bernstein, Hartgummi, Glas, Seide, Pelzwerk, Wolle.

Bei der Vergleichung des elektrischen Zustandes dieser Körper untereinander zeigen sich folgende Besonderheiten. Werden zwei kleine Bernsteinstücke leicht beweglich aufgehängt und in gleicher Weise elektrisch gemacht, so stoßen sie sich ab; desgleichen zwei Glasstücke und überhaupt zwei gleiche in gleicher Weise elektrisierte Stücke. Dagegen ziehen sich ein Glasstück und ein Bernsteinstück, wenn sie elektrisiert sind, an.

Der genaue Verfolg dieser Erscheinung lehrt uns, daß es zwei Arten der Elektrisierung gibt und stets stoßen sich gleichartig elektrisierte Körper ab, ungleichartig elektrisierte ziehen sich dagegen an.

Körper, die mit Glas gleichartig elektrisch sind, heißen positiv elektrisiert, solche, die mit Bernstein gleichartig elektrisch sind, dagegen negativ elektrisch.

Beim Reiben zweier zur Elektrizitätserregung geeigneter Körper aneinander, wird stets der eine positiv, der andere negativ elektrisch.

§ 2. Leiter und Nichtleiter. Elektrisieren durch Influenz.

Im Gegensatz zu dem Verhalten der genannten Körper steht das Verhalten der Metalle. Es gelingt nicht, wenn man einen Metallkörper in der Hand hält, durch Reibung auf demselben eine Elektrisierung zu erhalten. Dagegen beobachtet man folgendes:

Hält man einen Metallkörper in der Hand und nähert ihn einem durch Reibung elektrisch gemachten Körper, so zeigt die dem letzteren zugewandte Seite des Metalles ebenfalls den elektrischen Zustand und zwar den entgegengesetzten wie den des geriebenen Körpers, wie sich durch Vermittelung eines kleinen, in bekannter Weise elektrisierten Körpers nachweisen läßt. Dieser elektrische Zustand auf dem Metall verschwindet jedoch sofort wieder, sobald es von dem anderen elektrisierten Körper wieder entfernt wird.

Hält man das Metall nicht in der Hand, sondern hängt es an Seidenfäden auf, oder stützt es auf Siegellack oder Hartgummistangen und wiederholt dann den Versuch, so zeigt sich das Metall bei Annäherung des elektrisierten Körpers auf beiden Seiten elektrisch, auf der abgewandten Seite gleichartig, auf der zugewandten entgegengesetzt. Nach Entfernung des elektrisierten Körpers ist auch die Elektrisierung auf dem Metall sofort wieder verschwunden.

Berührt man beim vorigen Versuche, bevor der elektrische Körper wieder entfernt ist, das Metall mit der Hand oder einem in der Hand gehaltenen Draht an irgend einer Stelle, so verschwindet stets die gleichartige Elektrisierung auf der abgewandten Seite, die ungleichartige bleibt bestehen. Heben wir die Berührung auf und entfernen dann den elektrischen Körper, so bleibt die ungleichartige Elektrisierung auf dem Metalle erhalten und verteilt sich über den ganzen Metallkörper. Berühren wir jetzt noch einmal, so verschwindet auch diese Elektrisierung.

Man nennt diese Art, einen Metallkörper durch bloße Annäherung eines elektrisierten Körpers, der selbst dabei nichts von seiner Elektrisierung einbüßt, zu laden, Elektrisierung durch Influenz, und wir sehen jetzt aus den genannten Versuchen:

Eine bleibende Elektrisierung auf Metallen durch Influenz

läßt sich nur erhalten, wenn dieselben gestützt sind durch Hartgummi, Siegellack, Seidenfäden und ähnliche Körper. Wir nennen diese Körper Isolatoren. Andere Körper, durch deren Berührung dem Metalle seine Elektrisierung wieder mehr oder weniger schnell entzogen wird, wie Metalle, feuchtes Papier oder Holz, heißen Leiter der Elektrizität.

Isolatoren sind in erster Linie diejenigen Körper, auf denen sich auch durch Reibung Elektrisierung unmittelbar erzielen läßt. Dagegen läßt sich aber nicht sagen, daß auf Leitern eine Elektrisierung durch Reibung ausgeschlossen ist, vielmehr geht im allgemeinen die erhaltene Elektrisierung infolge der Eigenschaft des Leiters als solchen nur sofort wieder verloren. Stützt man dagegen ein Metall auf einen Isolator, so wird es auch durch Reibung elektrisch.

Die Anziehung leichter Körper (Papierschnitzel, Hollundermark) durch einen elektrischen Körper beruht darauf, daß die leichten Körper mehr oder weniger gute Leiter sind. Sie erhalten daher durch Influenz entgegengesetzt elektrische Ladung; die Anziehung beruht auf der Anziehung der entgegengesetzt geladenen Teile. Überall, wo elektrische Anziehung oder Abstoßung wahrgenommen wird, ist auf beiden aufeinander wirkenden Körpern eine Elektrisierung vorhanden.

§ 3. Elektrisierung durch Leitung.

Befestigt man zwei Metallkörper auf isolierenden Stützen, elektrisiert den einen durch Influenz und stellt dann zwischen beiden eine leitende Verbindung her, indem man sie in Berührung bringt, oder indem man einen an isolierender Handhabe gehaltenen Draht vom einen zum anderen hinüberlegt, so verteilt sich die Ladung auf beide Metallkörper. Der zweite wird durch Leitung vom ersten aus geladen.

Eine Folge der Elektrisierung durch Leitung ist es, daß ein isolierter Metallkörper, wenn er elektrisiert ist, stets in allen seinen Teilen elektrisch sein muß. Befestigen wir daher an ihm an irgend einer Stelle ein Paar leichte Aluminiumblättchen, die dicht aneinander herunterhängen, so bekommen auch diese die Elektrisierung und stoßen sich ab, d. h. bewegen sich infolge ihrer leichten Biegsamkeit von einander. Die Größe der Bewegung der Blättchen kann uns dann ein Urteil über die Elektrisierung des Metalles geben, in dem

Sinne, daß wir bei größerem Ausschlage der Blättchen dem Metalle eine stärkere Elektrisierung zuschreiben. Ein isolierter mit derartigen Blättchen versehener Metallkörper heißt ein Elektroskop.

§ 4. Der metallene Hohlkörper.

Haben wir einen metallenen Hohlkörper und können durch eine Öffnung in denselben einen kleineren elektrisierten Metallkörper hineinbringen und dann eine metallische Berührung zwischen beiden herstellen, so geht die ganze Elektrisierung auf den äußeren Metallkörper über. Nach dem Herausziehen des kleineren Körpers nach aufgehobener Berührung, läßt sich auf letzterem keine Spur von Elektrisierung mehr nachweisen. Es folgt hieraus der Satz:

Die Elektrisierung von Metallen befindet sich stets ganz auf der Oberfläche derselben.

Durch diesen Versuch werden wir in den Stand gesetzt, die Elektrisierung eines Metallkörpers vollständig auf einen Anderen zu übertragen. Ist der Metallkörper des Elektroskops ein derartiger Hohlkörper mit kleiner Öffnung, so können wir hierdurch erkennen, ob die Elektrisierung von kleinen Versuchskörpern in einem Versuche größer, gleich oder kleiner ausfällt als in einem andern.

Während im allgemeinen ein Metallkörper in der Nähe eines elektrisierten Körpers durch Influenz nach § 2 dauernd geladen werden kann, gelingt dies nicht, wenn der elektrisierte Körper ein hohler Metallkörper ist und der Probekörper in das Innere desselben hineingeführt ist. Ein beliebig stark elektrisierter hohler Metallkörper übt in seinem Innern keine Influenzwirkung aus. Da alle Beobachtung elektrischer Wirkung auf vorangegangener Influenz beruht, so erhalten wir den Satz:

Die Ladung metallener Körper übt im Innern keinerlei Wirkung aus.

Wird der kleine Metallkörper elektrisiert und in den Hohlkörper ohne gegenseitige Berührung hineingeführt, so läßt sich jetzt der Hohlkörper nach § 2 dauernd elektrisieren. Der Versuch zeigt, daß die erhaltene Elektrisierung immer genau die gleiche ist, an welcher Stelle des Hohlraumes der Innenkörper sich auch befunden hatte. Es wird dadurch auch

möglich, die Gesamtelektrisierung eines durch Reibung elektrisierten Isolators, sowie die Summe der Elektrisierungen einer Reihe verschiedener Körper zugleich zu bestimmen. Auf die Weise läßt sich der Satz beweisen:

Wird auf irgend eine Weise auf einem Körper eine Elektrisierung der einen Art hervorgerufen, so tritt stets auf einem anderen Körper eine genau gleich starke Elektrisierung der anderen Art auf.

§ 5. Ausmessen des elektrischen Feldes.

Außer der Vergleichung der Gesamtelektrisierungen beliebiger Körper, setzt uns das Elektroskop mit metallenem Hohlkörper nun auch noch in den Stand, die Ausbreitung der elektrischen Wirkung in der ganzen Umgebung eines elektrisierten Körpers zu verfolgen. Wir bringen dazu einen metallenen Probekörper, an die Stelle des Raumes, wo wir die elektrische Wirkung prüfen wollen, laden ihn dort durch Influenz nach § 2 und prüfen dann die erhaltene Ladung mit dem Elektroskop. In der gleichen Weise verfahren wir mit beliebigen anderen Stellen in der Umgebung des elektrisierten Körpers. Wir werden im allgemeinen finden, daß die Wirkungen an den verschiedenen Stellen verschieden sind; es lassen sich jedoch zu irgend einem Orte eine Menge anderer finden, in welchen die Wirkung die gleiche ist, und diese liegen in einer zusammenhängenden Fläche, die im allgemeinen den elektrisierten Körper schalenförmig umgibt. In derselben Weise kann man, von geringerer zu stärkerer Wirkung fortschreitend, eine Reihe Flächen gleicher Wirkung sich konstruieren, überall in dem Raume zwischen irgendwelchen elektrischen Körpern.

Elektrisiert man zwei gleiche kleine Probekugeln durch Influenz an zwei verschiedenen Stellen derselben Fläche gleicher Wirkung, so ändert sich ihre Elektrisierung nicht, wenn man die Kugeln, während sie sich an den betreffenden Stellen befinden, vorübergehend durch einen feinen Draht verbindet. Lagen die Probekugeln dagegen nicht auf derselben Fläche gleicher Wirkung, so findet bei der Berührung durch den Draht eine Verschiebung der Elektrisierungen statt.

Bringt man zwei durch einen feinen Draht verbundene Probekugeln in die Nähe eines elektrisierten Körpers und

entfernt dann den verbindenden Draht, so zeigen die Kugeln keine Elektrisierung, wenn sie auf einer Fläche gleicher Wirkung im Augenblick der Entfernung des Drahtes gelegen hatten. War dies nicht der Fall, so zeigt sich die Kugel, die auf der Fläche stärkerer Wirkung gelegen hatte, mit dem Hauptkörper entgegengesetzt elektrisch, die andere gleichartig.

Das Ergebnis dieser Versuche läßt sich auch dahin zusammenfassen, daß man sagt, daß in der Umgebung elektrisierter Körper in leitenden Körpern stets eine Verschiebung der Elektrisierungen in dem Sinne stattfindet, daß die gleichartige Elektrisierung von der Fläche stärkerer Wirkung, nach derjenigen geringerer Wirkung fortgeschoben wird, entgegengesetzt die ungleichartige. Betrachtet man den Zustand eines unelektrischen, leitenden Körpers als die Übereinanderlagerung entgegengesetzt gleicher Elektrisierungen, so läßt sich auch die Entstehung der Elektrisierung durch Influenz unter diese Darstellung einbegreifen.

Wiederholt man diesen Versuch mit zwei kleinen, isolierten Metallplatten, die man flach aneinanderlegt und an eine Stelle des Feldes bringt und dann trennt, so zeigt sich, wenn die Ebene der Platten genau senkrecht zu einer Fläche gleicher Wirkung stand, keine Elektrisierung. Lagen die Platten mit ihrer Berührungsfläche in einer Fläche gleicher Wirkung, so ist die Elektrisierung nach der Trennung am stärksten. In dazwischen liegenden Stellungen werden die Elektrisierungen auch dazwischen liegende Werte erhalten. Hiernach kann man annehmen, daß die Kraft, die die Elektrisierung zu verschieben strebt, senkrecht zu den Flächen gleicher Wirkung gerichtet ist, und daß das Gleiten der Elektrisierung längs schräg zu dieser Richtung gelegten Metallflächen zu vergleichen ist mit der Bewegung eines schweren Körpers auf einer schiefen Ebene.

Bei diesen Versuchen ist zu beachten, daß die in dem Plattenpaar enthaltenen Ladungen, in der Lage, wo diese Ladungen am stärksten sind, durchaus nicht proportional den Influenzladungen einer einzelnen Probekugel sind. Auf derselben Fläche gleicher Wirkung gibt das Plattenpaar nicht überall gleiche Ladungen. Jedenfalls aber geben uns die Versuche mit dem Plattenpaar eine ge-

richtete Größe, die überall auf den durch die Probekugel bestimmten Flächen gleicher Wirkung senkrecht steht.

Beruhen alle Anziehungs- und Abstoßungserscheinungen auf der vorangehenden Verteilung von Elektrisierung durch Influenz, so ist zu erwarten, daß auch die Richtung der zu beobachtenden Kräfte von den Flächen größerer zu denjenigen geringerer Wirkung führen muß. Der Versuch bestätigt diese Erwartung und zeigt auch, daß die Richtung der Kraft senkrecht zu den Flächen gleicher Wirkung steht.

Die Umgebung der elektrisierten Körper wird das elektrische Feld genannt.

§ 6. Einfluß des Dielektrikums.

Bei allen genannten Versuchen ist als selbstverständlich angenommen, daß das Versuchsfeld der mit Luft erfüllte Raum zwischen den elektrischen Metallen oder festen Isolatoren ist. Es wurden die Wirkungen an verschiedenen Stellen des Feldes verglichen, dabei wurde aber offen gelassen, ob die Wirkungen dieselben sind, wenn an Stelle der Luft eine andere isolierende Substanz das Feld ausfüllt. Die Beobachtungen beziehen sich auf die Wirkung, die ein Körper auf einen, an einer anderen Stelle befindlichen ausübt. Wenn diese Wirkung auch an jeder Stelle des dazwischen liegenden Raumes zu verfolgen ist, so liegt es nahe zu erwarten, daß auch die das elektrische Feld ausfüllende Substanz auf die zu beobachtenden Wirkungen von Einfluß sein wird. Wiederholen wir daher die angeführten Versuche in einem mit reinem Benzin oder einer anderen, gut isolierenden Flüssigkeit gefüllten Behälter, so erhalten wir vollständig ähnliche Ergebnisse, was die Lage und Verteilung der Flächen gleicher Wirkung anbetrifft, dagegen sind die durch Influenz erhaltenen Ladungen durchweg merklich größer.

Da die Ausführung der Versuche in einem mit Flüssigkeit angefüllten Raume erheblich schwieriger und daher von geringerer Genauigkeit ist, als im Luftraume, so kann man sich von dem Einfluß der isolierenden Substanz auf die Übertragung der Wirkung in einfacherer Weise durch folgenden Versuch überzeugen.

Man lade eine Probekugel in der Nähe eines elektrisierten Körpers durch Influenz. Dann wiederhole man die Ladung

an derselben Stelle, jedoch indem man zwischen beide Körper eine möglichst dicke Platte eines Isolators, Glas oder Hartgummi, hält. Im zweiten Falle ist die Ladung stets merklich größer, als im ersten. Wir müssen daher schließen: an der Übertragung der Wirkung von dem elektrisierten Körper nach dem Leiter, an welchem wir die Verschiebung der Elektrisierung wahrnehmen, ist die dazwischenliegende Substanz beteiligt. Unter diesem Gesichtspunkte wird diese isolierende Substanz das Dielektrikum genannt.

§ 7. Verschiebung im Dielektrikum.

Durch die Versuche des § 2 und 3, welche den Unterschied zwischen Leitern und Isolatoren erkennen ließen, läßt sich wohl feststellen, daß Metalle anscheinend vollkommene Leiter sind, indem die an denselben zu beobachtenden Verschiebungen der Elektrisierung ohne merklichen Zeitaufwand erfolgen, ebenso, daß Körper wie Hartgummi, anscheinend vollkommene Isolatoren sind. Durch die gleichen Versuche läßt sich aber auch feststellen, daß es eine Reihe anderer Körper gibt, die mehr oder weniger gut leiten oder isolieren und daß überhaupt ein stetiger Übergang zwischen vollkommen leitenden und vollkommen isolierenden Körpern zu bestehen scheint; dann ist es aber auch wahrscheinlich, daß auch die scheinbaren Enden dieser Reihe, die Isolatoren, in Wirklichkeit nicht vollkommen isolieren und ebenso die Metalle nicht ganz ohne Zeitverlust die Elektrisierungen ausgleichen.

Ist aber der Unterschied zwischen Metallen und Isolatoren nur ein gradweiser, nicht ein wesentlicher, so ist zu erwarten, daß von den Verschiebungen der Elektrisierung, die wir an Metallen nach den Versuchen im § 7 beobachten können, in irgend einer Weise auch an Isolatoren etwas wahrzunehmen ist. In der Tat, wenn wir zwei kleine Metallplatten aneinderlegen, in ein elektrisches Feld bringen und dort voneinander trennen, so sind beide entgegengesetzt elektrisch. Wiederholen wir den Versuch mit schlechteren Leitern, etwa zwei Papierstücken, so ergibt sich das gleiche. Nehmen wir ein Stück des sehr gut isolierenden Glimmers und reißen es an derselben Stelle im elektrischen Felde längs seiner Spaltungsfläche auseinander, so zeigen auch die Trennungsflächen die entsprechenden elektrischen Ladungen.

Hiernach müssen wir sagen: wenn wir auch in den Versuchen der § 2 bis 7 die Elektrisierungen immer an den Oberflächen von Metallen beobachten, so brauchen wir deswegen doch die Metalle nicht als die wesentlichen Träger der Elektrisierung anzusehen. Nach der letzten Erfahrung könnten wir uns denken, daß, wenn wir in das trennende Dielektrikum einen Spalt hineinreißen könnten, daß dann stets an beiden neu entstandenen Flächen entgegengesetzte Elektrisierungen wahrzunehmen sein werden. Die Verschiebung der Elektrisierung, senkrecht zu den Flächen gleicher Wirkung, tritt also nicht nur an den Oberflächen der Metalle auf, sondern im ganzen Dielektrikum. Es kann nach den Versuchen sogar sein, daß das Wesentliche des ganzen Vorganges in der Ausbreitung eines besonderen Zustandes, der eben das Wesen der Elektrisierung ausmacht, durch das ganze Dielektrikum hindurch ist, und daß die Elektrisierung nur deswegen an der Oberfläche der Metalle vorwiegend wahrgenommen wird, weil diese zugleich die Grenze des Dielektrikums ist.

So sehr daher die angeführten Versuche geeignet sind, ein vollständiges Bild der Verteilung der elektrischen Wirkungen zu geben, so sind sie doch nicht imstande zu entscheiden, welche Rolle dabei das Dielektrikum selbst spielt. Leitet man daher aus diesen Versuchen eine mathematische Theorie der Erscheinungen ab, so wird es von größter Wichtigkeit sein, daß auch die Theorie über den Ursprung der Erscheinungen sich keine größere Beschränkung auferlegt, als aus den Versuchen gefolgert werden darf.

Zweites Kapitel.

Ein Gleichnis aus der Hydrodynamik.

§ 8. Niveauflächen, Induktionslinien, Induktionsröhren.

Um von den im vorigen Kapitel beschriebenen Versuchen eine mathematische Theorie aufzustellen, gehen wir von den Versuchen im § 5 mit dem kleinen Plattenpaar und der Probekugel im elektrischen Felde aus. Aus letzteren ergab sich, daß die elektrische Wirkung im Felde sich in Flächen gleicher Wirkung anordnet und aus ersterer, daß überall im Felde ein Bestreben besteht, eine Elektrisierung senkrecht zu diesen Flächen zu verschieben. Um dieses Bestreben zu charakterisieren, können wir jedem Punkte einen Vektor zuordnen, der durch seine Richtung die Richtung senkrecht zu den Flächen gleicher Wirkung angibt und dessen Größe die Größe der in dem Punkte in dem Plattenpaar erzeugten Influenzladung darstellt. Für die Größe dieser Ladungen gewinnen wir zahlenmäßige Werte, indem wir auf unser Elektroskop mehrere Male hintereinander genau die gleiche an derselben Stelle des Feldes erhaltene Ladung einer Platte vollständig übertragen und dadurch summieren. Dadurch erhalten wir eine Graduierung des Elektroskops nach Einheiten einer willkürlich gewählten Ladung und können mit dem so geaichten Elektroskop das Feld zahlenmäßig auswerten. Wir gelangen so dazu, in jedem Punkte des Feldes einen nach Größe und Richtung vollständig bestimmten Vektor anzunehmen. Diesen Vektor nennen wir den Vektor der elektrischen Induktion.

Gehen wir von einem Punkte in der Richtung seines Vektors zum benachbarten weiter, so wird hier der Vektor

im allgemeinen eine andere Richtung haben, aber wir können jedenfalls in dieser neuen Richtung fortschreitend wieder zum nächsten gelangen und so fort. Wir können so von jedem Punkte des Feldes ausgehen und zusammenhängende Induktionslinien ziehen, die stets senkrecht auf den Flächen gleicher Wirkung, die von jetzt an Niveauflächen heißen sollen, stehen. Unter der positiven Richtung der Induktionslinien soll diejenige verstanden sein, in welcher eine positive Elektrisierung fortgeschoben wird. Dann können wir weiter sagen, eine Induktionslinie kann niemals innerhalb des elektrischen Feldes endigen, denn von jeder Stelle kann man stets in der Richtung des dort vorhandenen Vektors zum benachbarten Punkte fortschreiten. Da nun die positive und negative Richtung der Induktionslinien gleichwertig sind, so kann auch keine Induktionslinie im elektrischen Felde ihren Anfang haben. Die Induktionslinien müssen also stets entweder in der Grenze des Feldes anfangen und auch in ihr aufhören, oder sie müssen in sich zurücklaufen. In einem Felde, daß sich im Gleichgewichtszustande befindet, können aber auch keine in sich zurücklaufenden Induktionslinien vorkommen, denn jede Induktionslinie führt stets von Flächen größerer Wirkung zu solchen geringerer Wirkung. Verfolgen wir also eine Induktionslinie mit unserer Probekugel, so erhalten wir in den späteren Punkten immer geringere Influenzladungen. Würde uns die Induktionslinie daher wieder an den Ausgangspunkt zurückführen, so müßten wir jetzt hier eine geringere Wirkung erhalten; das heißt aber, das Feld hat sich in der Zwischenzeit geändert. Bei allen im ersten Kapitel beschriebenen Versuchen handelt es sich aber stets um Felder, in denen Gleichgewicht erreicht ist, also genügt für die Theorie dieser Versuche vollständig der Fall, daß die Induktionslinien von Grenze zu Grenze des Feldes sich erstrecken.

Die Gesamtheit der Induktionslinien gibt uns zunächst nur ein Bild von der Richtung des Vektors der Induktion in jedem Punkte des Feldes, ohne, daß wir zunächst etwas über die Größe desselben aus diesem Bilde entnehmen können. Ziehen wir jetzt auf irgend einer Niveaufläche zwei Systeme sich kreuzender Linien derart, daß lauter kleine Flächenstücke gebildet werden und ziehen durch die Begrenzungen dieser Flächenstücke die Induktionslinien, so wird das ganze

Feld in lauter aneinanderliegende Röhren zerlegt, die wir Induktionsröhren nennen. Da die Niveauflächen den das Feld erzeugenden Körper vollständig umschließen, und die Flächen stärkerer Wirkung innerhalb derjenigen schwächerer Wirkung liegen, so muß der Querschnitt der Induktionsröhren wenigstens durchschnittlich enger sein in den Gebieten, wo die Kraft stärker ist und weiter in den Gebieten schwächerer Kraft. Das Bild der Induktionsröhren könnte uns dann gleichzeitig ein Maß für die Stärke der Induktion in jedem Punkte geben, wenn sich nachweisen läßt, daß diese überall genau im umgekehrten Verhältnis des Querschnittes der Induktionsröhre an der betreffenden Stelle steht. Dieser Nachweis läßt sich bis zu einer gewissen, aber nur geringen Genauigkeit durch Versuche nach der Anordnung des § 5 führen, weit vollständiger und bis zur größten Genauigkeit wird derselbe erbracht, wenn wir zunächst als richtig ansehen, daß in Wirklichkeit die Stärke der Induktion stets umgekehrt proportional den Querschnitten der Induktionsröhre ist, und alle hieraus sich ergebenden Folgerungen ziehen und ihre Übereinstimmung mit der Erfahrung prüfen.

§ 9. Vergleich mit einer strömenden Flüssigkeit.

Sobald wir aber diese letztgenannte Annahme als richtig gelten lassen, können wir durch einen Vergleich ein höchst anschauliches Bild von der Verteilung der Induktion im elektrischen Felde gewinnen, und eine Reihe zu erwartender Gesetzmäßigkeiten aus dem Bilde ablesen.

Fließt eine nicht zusammendrückbare Flüssigkeit in einer Röhre von ungleichem Querschnitt, so ist die Geschwindigkeit der Strömung an jeder Stelle dem dort herrschenden Querschnitt umgekehrt proportional. Denken wir uns also von den Grenzen des elektrischen Feldes eine derartige Flüssigkeit in die Induktionsröhren einströmen und in diesen entlang fließen, so wird uns die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an jeder Stelle ein Bild der dort herrschenden Stärke der Induktion geben.

Durch die Einführung dieser Flüssigkeit soll durchaus keine Erklärung dessen, was im elektrischen Felde vorgehen mag, gegeben werden, so sehr auch die supponierte Bewegung dem, was wir Verschiebung der Elektrisierung

nannten, entsprechen mag, sondern die Einführung der Vorstellung einer Bewegung gibt uns nur deswegen eine Übersicht über die Eigenschaften des Feldes, weil die mathematischen Gesetze dieser Bewegung mit der Verteilung der Induktion dieselben Beziehungen aufweisen. Die Flüssigkeit soll keine physische sein, sondern nur eine mathematische, ein sich bewegendes, kontinuierliches Punktsystem. Aus diesem Grunde sind wir auch berechtigt, dieser Flüssigkeit Eigenschaften beizulegen, die an einer physischen Flüssigkeit uns nicht bekannt sind, die aber in unserem Falle die Übereinstimmung des Bildes mit dem, was es uns darstellen soll, zu einer noch vollständigeren machen. Zu dem Zwecke setzen wir fest, daß die Flüssigkeit sich zwar nach den Gesetzen des hydrostatischen Druckes bewegt, aber daß ihren Teilen keine Trägheit zukommt. Die an einer Stelle entstehende Geschwindigkeit soll dafür stets gleich dem dort herrschenden Druckgefälle sein multipliziert mit einer Konstanten, die in einem homogenen Dielektrikum überall die gleiche ist, die aber in den verschiedenen Dielektricis eine andere ist, als ob die Flüssigkeit in ihrer Bewegung durch jedes Dielektrikum einen spezifischen Widerstand findet. Ferner soll die Flüssigkeit an den Grenzen des Feldes, dort, wo wir positive Elektrisierung wahrnehmen, auftreten, ohne daß wir angeben, woher sie entsteht, und an den Stellen negativer Elektrisierung wieder verschwinden. Die ersteren Stellen nennen wir Quellpunkte, die letzteren Sinkstellen oder negative Quellpunkte der Flüssigkeit.

§ 10. Konstruktion der Einheitsröhren.

Wir hatten die Induktionsröhren konstruiert, indem wir eine Niveaufläche durch zwei Systeme sich kreuzender Linien in Flächenelemente einteilten. Wählen wir jetzt diese Flächenelemente so, daß durch jedes in der Zeiteinheit die Volumeneinheit der Flüssigkeit hindurchströmt, wobei über die Größe der zugrunde gelegten Maßeinheit nichts festgelegt wird, für dieselbe vielmehr ein beliebig kleiner, endlicher Raumteil gewählt werden kann, so erhalten wir, wenn der Inhalt des Flächenelementes mit s und die Geschwindigkeit mit v bezeichnet wird, die Beziehung $vs = 1$. Die

durch diese Einteilung erhaltenen Induktionsröhren sollen Einheitsröhren heißen.

Konstruieren wir ferner ein System von Niveauflächen so, daß der Unterschied der Ladung unserer Probekugel in benachbarten Niveauflächen immer dieselbe Größe hat, wie wir mit dem Elektroskop feststellen können, und wobei wieder der Wert dieser Größe in einer beliebig kleinen Einheit gewählt werden kann, so werden die Induktionsröhren jede einzelne Niveaufläche in lauter kleine Flächenstücke teilen, und es wird auch für jedes dieser Flächenstücke die Beziehnng $vs = 1$ gelten. In benachbarten Niveauflächen wird der Unterschied der Drucke, unter dem die Flüssigkeit steht, immer derselbe sein. Da wir die Einheit, in der wir den Druck messen wollen, noch willkürlich wählen können, denn es ist die willkürliche Einheit, nach der wir das Elektroskop geaicht haben, wollen wir dieselbe so wählen, daß die Druckdifferenz in benachbarten Niveauflächen gerade dieser Einheit gleich ist. Bezeichnen wir noch die Länge einer Induktionsröhre zwischen benachbarten Niveauflächen mit h, so ist das Druckgefälle auf dieser Strecke gleich $\frac{1}{h}$; und wenn der spezifische Widerstand des Dielektrikums gegen das Strömen der Flüssigkeit mit $\frac{1}{k}$ bezeichnet wird, so haben wir nach der Definition des Widerstandes im vorigen Paragraphen die Beziehung $v = \frac{k}{h}$ oder $\frac{vh}{k} = 1$ und folglich auch $s = \frac{h}{k}$ d. h., je größer die Flächenelemente auf den Niveauflächen sind, desto weiter stehen auch die Niveauflächen voneinander ab. Das Druckgefälle selbst schreibt sich stets $\frac{1}{h} = \frac{v}{k}$.

Jede Einheitsröhre beginnt in einem Quellpunkt und endet an einer Sinkstelle. Ein Quellpunkt, von dem nur eine Einheitsröhre ausgeht, wollen wir eine Einheitsquelle nennen und entsprechend von einer Einheitssinkquelle sprechen. Ist dann in einem Falle das System der Niveauflächen bestimmt, und nehmen wir die Beziehung zwischen dem Druck und der Geschwindigkeit, also die Konstante k als bekannt an, so können wir durch die Beziehung $s = \frac{h}{k}$ die Anzahl

der im Felde vorhandenen Einheitsröhren ermitteln und für jeden Ort die Bewegung der Flüssigkeit angeben, und auch die Zahl und Lage der Einheitsquellen und Sinkstellen ermitteln. Ist also die Druckverteilung gegeben, so ist auch die Verteilung der Quellpunkte eindeutig bestimmt.

§ 11. Die Druckverteilung bei gegebenen Quellen ist eindeutig.

Ist jetzt in einem Raume in zwei verschiedenen Fällen die Druckverteilung gegeben, so stellt auch eine Druckverteilung, bei welcher an jeder Stelle der Druck gleich der Summe der Drucke in den vorigen Fällen ist, eine mögliche Druckverteilung dar. Denn in diesem dritten Falle ist das Druckgefälle in irgend einer Richtung gleich der Summe der Druckgefälle in den beiden ersten Fällen. Folglich ist auch die in der Zeiteinheit im dritten Falle durch ein Flächenelement strömende Flüssigkeitsmenge gleich der Summe der Mengen in den ersten beiden Fällen. Daher bewirkt die Druckverteilung im dritten Falle ebenfalls eine Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit, und da sie als Quellpunkte auf die Summe der Quellpunkte, die Sinkstellen als negative Quellpunkte gerechnet, führt, so kann sie diejenige Druckverteilung wirklich sein, die aus dem Hinzufügen der Quellen des zweiten Falles zu denen des ersten entsteht. Dieselbe Betrachtung läßt sich auch für den Fall der Differenz der Drucke durchführen, als Quellen bekommt man dann die Gesamtheit der Quellen, wobei nur die des zweiten Falles entgegengesetztes Zeichen haben.

Ist ferner in allen Punkten einer völlig geschlossenen Fläche der Druck überall der gleiche und sind im Inneren des umschlossenen Raumes keine Quell- oder Sinkstellen, so können im Inneren keine Induktions- oder Stromröhren vorhanden sein, denn da keine Quellpunkte im Inneren sein sollen, können ihre Enden nicht im Inneren der geschlossenen Fläche liegen. Würden sie aber an einer Stelle in die Fläche eintreten und an einer anderen wieder austreten, so müßten an dieser Stelle die Werte der Drucke verschieden sein, was der eben gemachten Annahme widerspricht. Es kann also der Druck im ganzen Inneren nur konstant und gleich

dem an der Oberfläche sein. Im Inneren der Fläche ist die Flüssigkeit in Ruhe.

Ist dann aber die Druckverteilung an allen Punkten einer geschlossenen Fläche gegeben und ebenso alle Quellpunkte in dem umschlossenen Raume, so ist im Inneren nur eine Druckverteilung möglich. Denn wäre noch eine zweite möglich, so müßte auch die Differenz beider eine mögliche Druckverteilung sein. Bei der Bildung der Differenz beider erhält man aber auf der ganzen Fläche den Druck Null und alle Quellpunkte verschwinden. Es muß daher die Differenz beider in allen Punkten des umschlossenen Raumes Null sein, das heißt, es gibt von einem System von Quellen stets nur eine einzige Druckverteilung innerhalb des umschlossenen Raumes, die mit den bestimmten Werten auf der Oberfläche übereinstimmen kann. Da aber die umschließende Fläche ganz beliebig weit genommen werden kann, so gilt dieser Satz auch für den ganzen Raum; da ferner angenommen werden kann, daß ein im endlichen liegendes Quellensystem in unendlicher Entfernung nur unendlich kleine Drucke erzeugen kann, so folgt, daß die Druckverteilung durch ein Quellensystem stets eindeutig bestimmt ist.

In Verbindung mit dem zu Anfang dieses Paragraphen abgeleiteten folgt aber: Die Wirkung zweier gleichzeitig vorhandener Systeme von Quellen wird erhalten, indem wir die von jedem Systeme für sich hervorgerufenen Drucke einfach addieren, oder indem wir die Geschwindigkeiten beider Systeme nach dem Parallelogramm der Bewegungen zusammenfügen.

§ 12. Druckverteilung einer Einheitsquelle.

Wir sind nun in der Lage, die durch irgend ein System von Quellen erzeugten Einheitsröhren zu konstruieren, sobald wir noch die Druckverteilung, die von einer einzigen Einheitsquelle herrührt, kennen. Besteht aber in einem unbegrenzten Raume an einer einzigen Stelle eine Einheitsquelle, so muß die Flüssigkeit von hier aus nach allen Seiten symmetrisch abfließen. Durch eine Kugelfläche vom Radius r

um diese Quelle als Mittelpunkt fließt dann in der Zeit Eins die Einheit des Flüssigkeitsvolumens. Die Geschwindigkeit in der Kugeloberfläche ist daher $v = \frac{1}{4\pi r^2}$; folglich ist das Druckgefälle, oder der negative Differentialquotient des Druckes in der Richtung von r nach § 10 $\frac{v}{k} = \frac{1}{4\pi r^2 k}$ und der Druck selbst, den wir mit p bezeichnen wollen, ergibt sich, wenn wir noch annehmen, daß er im Unendlichen verschwindend klein ist, zu $p = \frac{1}{4\pi r k}$, d. h. der Druck ist stets umgekehrt proportional dem Abstand von der Quelle.

Ist eine beliebige Anzahl von Quellen vorhanden, so ergibt sich der Wert des Druckes an irgend einer Stelle, indem der Ausdruck $\frac{1}{4\pi r k}$ gebildet wird für jede einzelne Quelle an der betreffenden Stelle und alle diese Werte addiert werden.

Auf das elektrische Feld angewendet, läßt sich dieses nach § 9 auch aussprechen: die an irgend einer Stelle des Feldes hervorgerufene Induktion, d. h. die hier an dem Plattenpaar erhaltene Stärke der Ladung, kann dargestellt werden durch einen Ausdruck von der Form $\frac{1}{4\pi k}\sum\frac{1}{r^2}$, wobei die unter dem Summenzeichen stehenden Größen r als die Abstände des betreffenden Ortes von den Grenzen des Feldes, wo Elektrisierungen wahrgenommen werden, zu messen sind. Die Größen $\frac{1}{r^2}$ sind geometrisch zu addieren und dabei ist jeder Größe $\frac{1}{r^2}$ die Richtung von der Grenze des Feldes nach dem betreffenden Orte hin beizulegen, wenn an der Grenze positive Elektrisierung wahrgenommen wird, im andern Falle die entgegengesetzte. Neben dieser Vektorgröße im Felde erhielten wir durch die Versuche mit der Probekugel noch Flächen gleicher Wirkung. Diese entsprechen den Flächen, die überall senkrecht zum

Vektor stehen, und in welchen die Größen $\frac{1}{4\pi k}\sum\frac{1}{r}$ gleiche Werte haben. In diesem Summenausdruck sind die Größen $\frac{1}{r}$ als einfache Zahlenwerte aufzufassen, die positiv sind, wenn sie von positiven Elektrisierungen herrühren, sonst negativ; die Summation ist in diesem Falle algebraisch. Diese ungleiche Behandlung der Summenzeichen ergibt sich aus unserm hydrodynamischen Gleichnis. Die Größen $\frac{1}{r^2}$ entsprechen den durch die verschiedenen Einheitsquellen erzeugten Geschwindigkeiten und müssen daher nach dem Parallelogramm zusammengesetzt werden, während die Größen $\frac{1}{r}$ dem an der Stelle herrschenden Drucke entsprechen.

Die durch eine Einheitsquelle bewirkte Induktion nimmt im Verhältnis des umgekehrten Quadrates der Entfernung ab.

§ 13. Allgemeine Sätze. Fluß durch eine Fläche.

Die vollständige Analogie zwischen der Ausbreitung der Induktion und dem Strömen einer inkompressiblen Flüssigkeit gestattet uns noch, die folgenden Sätze unmittelbar auszusprechen.

Befindet sich innerhalb einer geschlossenen Fläche eine gewisse Zahl Einheitsquellen, so läßt sich die Wirkung derselben überall außerhalb der Fläche immer vollständig ersetzen durch ein anderes System von Einheitsquellen, die ganz in der Fläche selbst liegen. Denn ziehen wir die eindeutig bestimmten Einheitsröhren, so können wir dort, wo dieselben die Fläche durchdringen, für jede Röhre eine Einheitsquelle annehmen, und die Röhre erst dort beginnen lassen. Für die ganze Wirkung außerhalb der Fläche ersetzen diese Quellen vollständig die Wirkung der ursprünglich gegebenen Quellen.

In derselben Weise können alle außerhalb einer geschlossenen Fläche liegenden Quellen stets für die Wirkung im Innern der Fläche vollständig ersetzt werden durch eine bestimmte Verteilung von Einheitsquellen in der Fläche selbst.

Da ferner aus jeder Einheitsquelle in der Zeiteinheit die Volumeneinheit der Flüssigkeit austritt und die Flüssigkeit inkompressibel ist, so muß die aus einer geschlossenen Fläche in der Zeiteinheit austretende Flüssigkeitsmenge immer gleich der im Innern der Fläche vorhandenen Anzahl von Einheitsquellen sein, wobei die Sinkstellen als negative Einheitsquellen gelten. Tritt in die geschlossene Fläche auf einer Seite ebenso viel Flüssigkeit ein, wie auf der anderen aus, so können sich im Innern der Fläche keine oder nur entgegengesetzt gleiche Quellen befinden. Es ist Gebrauch geworden, infolge der meistbenutzten Wahl der Maßeinheit für die Ergiebigkeit der Quellen, das 4πfache der in der Zeiteinheit eine geschlossene Fläche durchströmenden Flüssigkeitsmenge den „Fluß durch die Fläche" zu nennen. (Vergl. § 20).

§ 14. Scheinbare Ladung an der Grenze verschiedener Dielektriken.

Es war bisher angenommen, daß das elektrische Feld ganz aus demselben Dielektrikum besteht, dessen Widerstandskoeffizient, das heißt das Verhältnis zwischen dem Druck der Flüssigkeit und der entstehenden Geschwindigkeit, $\frac{1}{k}$ war. Die Verhältnisse in einem anderen, homogenen Medium mit dem Koeffizienten k' sind natürlich ganz analog, nur die numerischen Verhältnisse werden andere. Wir hatten im § 10 festgesetzt, daß die Druckdifferenz zwischen zwei Niveauflächen der Einheit gleich sein sollte, so daß $\frac{vh}{k} = 1$ gesetzt werden konnte; soll diese Beziehung bestehen bleiben, so muß im Dielektrikum vom Koeffizienten k' ebenfalls $\frac{v'h'}{k'} = 1$ sein. Wenn dann die Lage der Niveauflächen in beiden Fällen dieselbe ist, so ist $h = h'$, also wird $\frac{v}{k} = \frac{v'}{k'}$, oder $v' = \frac{k'}{k} v$; das heißt, in dem Medium k' bewegt sich durch jeden Querschnitt der entsprechenden Induktionsröhren eine Flüssigkeitsmenge, die im Verhältnis $\frac{k'}{k}$ größer ist, als im Medium k. In einem Medium mit dem Koeffizienten oder Index k' besteht also genau die gleiche Verteilung der elek-

trischen Induktion, wie in einem Medium mit dem Index k, wenn in letzterem die Ergiebigkeit aller Quellen das $\frac{k'}{k}$ fache bei der gleichen räumlichen Anordnung beträgt

Fügt man jetzt in das Dielektrikum des elektrischen Feldes vom Index k einen begrenzten dielektrischen Körper von Index k' ein, so wird die Induktion im Außenraum, wie wir aus den Versuchen in § 6 wissen, beeinflußt. Es wird dann der eingeschaltete Körper jedenfalls von Induktionsröhren durchzogen und wir können uns die ganze Flüssigkeitsströmung in diesem Körper zu stande gebracht denken, indem wir an jeder Eintrittsstelle einer Einheitsröhre in das Innere eine Einheitsquelle, an jeder Austrittsstelle eine Einheitssinkstelle befindlich annehmen. Wollen wir dann die Substanz dieses Körpers wieder durch das Außenmedium ersetzen, so kann die gleiche Strömung im Innern nur dann bestehen, wenn die Ergiebigkeit der eben angenommenen Quellen das $\frac{k'}{k}$ fache wie vordem beträgt; das heißt, wir müssen uns, wenn wir den Körper wegnehmen, an der vorherigen Grenzfläche in jeder Einheitsröhre $\frac{k'-k}{k}$ Einheitsquellen beim Eintritt und ebensoviele Sinkstellen beim Austritt hinzugefügt denken, um dieselbe Verteilung der Induktion im Innern zu erhalten. Was aber für den Innenraum, in das Innere hinein gerechnet, Quellen sind, sind für den Außenraum Sinkstellen und umgekehrt, also sehen wir, daß ein Isolator, der in ein elektrisches Feld mit kleinerem k eingeführt wird, in der Weise wirkt, als wenn seine Konstante die gleiche wäre, wie die der Luft, dafür aber auf der den auftreffenden Induktionslinien zugewendeten Seite negative Elektrisierung auftritt, auf der abgewendeten Seite dagegen positive. Auf der Oberfläche eines Isolators im elektrischen Felde zeigt sich also ebenfalls eine Elektrisierung, nur ist die Verteilung eine andere, wie bei einem Metallkörper. Versuche bestätigen diese Schlußfolgerung.

§ 15. Ablenkung der Induktionslinien.

Das Auftreten scheinbarer Ladungen an den Grenzflächen des Isolators ist nicht die einzige Wirkung, die

das Einbringen desselben in das elektrische Feld hervorruft; es wird vielmehr auch die Richtung der Induktionslinien geändert in der Weise, daß dieselben im allgemeinen beim Durchtreten durch die Grenzfläche eine Ablenkung erfahren. Die Größe und Art dieser Ablenkung ergibt sich aus der Bedingung, daß die Geschwindigkeitskomponente unserer Flüssigkeit senkrecht zur Grenzfläche in beiden Medien die gleiche sein muß wegen der Unzusammendrückbarkeit. Sind diese Komponenten w und w' so ist $w = w'$. Zwischen den anderen Komponenten u, v und u', v' besteht, weil die Druckverteilung beiderseits der Grenzfläche die gleiche sein muß und deswegen das Druckgefälle tangential zur Grenzfläche beiderseits das gleiche ist, die Beziehung $\frac{u}{k} = \frac{u'}{k'}$ und $\frac{v}{k} = \frac{v'}{k'}$; folglich auch $u : u' = v : v'$. Die Einfalls- und Austrittsrichtung liegen in der gleichen durch die Normale zur Grenzfläche gelegten Ebene. Ferner sind die Tangenten des Eintritts- und Austrittswinkels $\operatorname{tg} i = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{w}$ und $\operatorname{tg} i' = \frac{\sqrt{u'^2 + v'^2}}{w'}$ und es verhält sich auf Grund obiger Beziehungen $\operatorname{tg} i : \operatorname{tg} i' = k : k'$. Das heißt, die Ablenkung der Induktionsröhren erfolgt nach einem Gesetz, ähnlich dem Berechnungsgesetz für Lichtstrahlen, nur, daß die Tangenten an Stelle der Sinus stehen und die Indizes vertauscht sind.

Ist jetzt k der Index für Luft und k' derjenige für den in das Feld eingeführten Körper, so übersehen wir die Art der Ablenkung der Induktionsröhren, wenn wir die beiden Grenzfälle $k' = 0$ und $k' = \infty$ betrachten. $k' = 0$ bedeutet: ein beliebig großes Druckgefälle kann nur verschwindend geringe Flüssigkeitsströmung bewirken, der Widerstand des Isolators ist unendlich groß. Dann ist $\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i'} = \infty$; es kann aber nicht $\operatorname{tg} i' = 0$ sein, denn in diesem Isolator kann überhaupt keine Strömung zu stande kommen, also ist $\operatorname{tg} i = 0$, d. h. die Induktionsröhren biegen so um, daß sie tangential an der Oberfläche des Isolators entlang laufen. In dem andern Falle $k' = \infty$ bewirkt das geringste Druckgefälle schon eine unendlich starke Strömung, jedes Druckgefälle wird also sofort vollständig

ausgeglichen, im Innern des Körpers kann also, wenn nicht dort selbst Quellen sind, keine Strömung bestehen. Dafür muß jetzt $\operatorname{tg} i = 0$ sein, das heißt, die Induktionsröhren stellen sich überall senkrecht zur Oberfläche des Körpers. Diese Oberfläche wird selbst zu einer Niveaufläche, in der überall der gleiche Druck herrscht, und im Innern herrscht überall derselbe Druck. Dies ist die Erscheinung, die wir an den scheinbar vollkommenen Leitern, den Metallen beobachten.

Drittes Kapitel.

Die mathematischen Prinzipien der Elektrostatik.

§ 16. Divergenz eines Vektors.

Die im vorigen Kapitel hergeleiteten Gesetzmäßigkeiten über die Verteilung der Induktion im elektrischen Felde, beruhten sämtlich auf der einen Annahme, daß die Größe des Vektors der Induktion überall umgekehrt proportional dem Querschnitt einer Induktionsröhre ist (vergl. § 8); hierauf gründete sich die Möglichkeit des Vergleichs mit dem Strömen einer inkompressiblen Flüssigkeit. Mathematisch ist dieses folgendermaßen zu formulieren. Es sei F die Größe eines derartigen Vektors und X, Y, Z seien seine rechtwinkeligen Koordinaten; soll F vergleichbar mit der Geschwindigkeit der Teile einer inkompressiblen Flüssigkeit sein, so muß in jedes Volumelement ebensoviel einströmen wie ausströmen. Betrachten wir einen Punkt, in welchem der Vektor gerade die Komponenten X, Y, Z hat und das anstoßende Volumelement $dx\,dy\,dz$ ist, so strömen in der Zeiteinheit in drei Seitenflächen dieses Elementes die Mengen $X dy\,dz$, $Y dz\,dx$, $Z dx\,dy$ ein; aus den gegenüberliegenden Flächen strömen dagegen aus die Mengen

$$\left(X+\frac{\partial X}{\partial x}\right) dy\,dz,\quad \left(Y+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) dz\,dx,\quad \left(Z+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy.$$

Daraus folgt als Bedingung, daß ebensoviel ausströmt, wie einströmt

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.$$

Man nennt auch den Ausdruck $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ die Divergenz des Vektors F und es ergibt sich, daß die Verteilung des Vektors an einer Stelle des Raumes dem Strömen einer inkompressiblen Flüssigkeit vergleichbar ist, wenn seine Divergenz an dieser Stelle gleich Null ist. Ist in einem ganzen endlichen Raume die Divergenz eines Vektors überall Null, so läßt sich seine Verteilung überall in diesem Raume durch Einheitsröhren darstellen und man sagt, seine Verteilung ist sphondyloidal oder solenoidal.

Hat die Divergenz an einigen Stellen einen von Null verschiedenen Wert, ist aber im übrigen Raume überall Null, so kann die Verteilung des Vektors ebenfalls noch durch den Vergleich mit einer inkompressiblen Flüssigkeit dargestellt werden, wenn man noch annimmt, daß an den Stellen, wo die Divergenz einen endlichen Wert hat, dieser Wert die Anzahl der an diesen Stellen entspringenden Einheitsquellen darstellt.

§ 17. Das Flächenintegral als Vektorfluß.

Man kann auch ohne Rücksicht auf den Vergleich mit der Flüssigkeit ableiten, daß, wenn die Divergenz eines Vektors in einem Raume überall Null ist, dann die Größe des Vektors überall umgekehrt proportional dem Querschnitt der Induktionsröhren ist. Zu diesem Zwecke sei mit F_s die Komponente des Vektors F in der Richtung der Normalen zu einem Flächenelement ds bezeichnet, also $F_s = F \cos \vartheta$, wenn ϑ der Winkel zwischen F und der Normalen ist. Man nennt dann $F_s ds$ den Fluß des Vektors durch das Flächenelement ds. Ist dann ds ein Element der Oberfläche eines endlichen Raumes, so heißt das Oberflächenintegral $\int F_s ds$ der Fluß des Vektors durch die ganze Fläche. Dieses Oberflächen-Integral können wir aber auch schreiben

$$\int F_s ds = \int F \cos \vartheta \, ds = \int (Xl + Ym + Zn) \, ds,$$

wenn l, m, n die Richtungskosinusse der Normalen nach den Koordinatenachsen sind. Nun ist aber $l\,ds = dy\,dz$, $m\,ds = dz\,dx$, $n\,ds = dx\,dy$, folglich

$$\int F_s ds = \int X dy\,dz + \int Y dz\,dx + \int Z dx\,dy.$$

In jedem dieser drei Integrale kommt nun das Flächenelement, über welches integriert wird, weil die Integration

über eine geschlossene Fläche erstreckt wird, immer zweimal mit genau gleichem Werte, nur entgegengesetztem Vorzeichen vor, indem an der einen Stelle die Vektorkomponente von dem Element nach Innen, an der anderen nach Außen gerichtet ist. Nennen wir zwei solche einander entsprechenden Werte von X, X' und X'', so können wir schreiben

$$\int X\,dy\,dx = \int (X' - X'')\,dy\,dz,$$

wo jetzt rechts jedes Element $dy\,dz$ nur einmal zu nehmen ist. Ist aber dann der Vektor im ganzen Innern des abgeschlossenen Raumes endlich und stetig, so kann die Differenz $(X' - X'')$ angesehen werden als das bestimmte Integral von $\frac{\partial X}{\partial x}\,dx$, erstreckt von der Stelle x' bis nach x''; also

$$\int (X' - X'')\,dy\,dx = \int \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \int \frac{\partial X}{\partial x}\,dv,$$

wenn dv ein Element des Raumes ist. Entsprechendes gilt für die andern beiden Integrale; es wird also der Fluß des Vektors durch die Fläche

$$\int F_s\,ds = \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dv.$$

Der Vektorfluß durch eine geschlossene Fläche, ist also stets gleich dem Raumintegral über die Divergenz des Vektors; ist die Divergenz überall im Innern der geschlossenen Fläche gleich Null, so ist auch der Fluß des Vektors gleich Null.

Begrenzen wir jetzt einen engen, cylindrischen Raum, so daß die Seitenlinien des Cylinders durch Induktionslinien, oder, wie wir allgemein sagen können, Flußlinien des Vektors gebildet werden, so mag die Fläche des Cylindermantels mit M und die Endflächen mit ds_1 und ds_2 bezeichnet sein. Der Fluß durch diesen cylindrischen Raum besteht dann aus der Summe der Flüsse durch die Endflächen, denn durch die Mantelfläche ist bei der gewählten Anordnung der Fluß gleich Null. Der Gesamtfluß ist also: $F_1 ds_1 - F_2 ds_2 = 0$, wenn F_1 und F_2 die Größen des Vektors in den Endflächen sind, deren Richtung in diesem Falle senkrecht zu ds_1 und ds_2 steht. Folglich ist $\frac{F_1}{F_2} = \frac{ds_2}{ds_1}$, das heißt aber, die Größe des Vektors steht in der Tat im umgekehrten Verhältnis des Querschnittes der Flußröhren.

§ 18. Das Linienintegral oder Potential.

Bei den Ableitungen des vorigen Kapitels hatten wir ferner aus dem Vergleich mit der Flüssigkeitsströmung entnommen, daß die Größe des Vektors der Induktion stets proportional einem Druckgefälle gefunden wird, also ließ sich der Vektor als negativer Differentialquotient einer anderen Funktion ansehen. Bezeichnen wir diese Funktion mit V, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -X, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -Z;$$

oder auch $-dV = Xdx + Ydy + Zdz$; der in dieser Gleichung rechts stehende Ausdruck muß also ein vollständiges Differential sein. Es ist dann aber auch $\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, oder es sind die Werte der drei Größen

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

gleich Null. Man kann diese drei Größen auch ansehen als die drei Komponenten eines anderen Vektors, den wir den curl des Vektors F nennen wollen. Die Bedingung, daß X, Y, Z als Differentialquotienten derselben Funktion V angesehen werden können, läßt sich dann auch dahin aussprechen, daß der curl von F überall gleich Null sein muß. Der anschauliche Sinn dieser Bedingung, $\operatorname{curl} F = 0$ liegt in folgendem. Der Ausdruck $Xdx + Ydy + Zdz$ läßt sich auch schreiben $\left(X\frac{\partial x}{\partial r} + Y\frac{\partial y}{\partial r} + Z\frac{\partial z}{\partial r}\right) dr$, wenn dr ein Element irgend einer Linie ist, $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}$ sind dann die Richtungskosinusse von dr, daher kann für $X\frac{\partial x}{\partial r} + Y\frac{\partial y}{\partial r} + Z\frac{\partial z}{\partial r} = F\cos\varepsilon$ gesetzt werden, wenn ε der Winkel zwischen F und dr ist und wir haben $-dV = F\cos\varepsilon\, dr$, $F\cos\varepsilon$ ist auch die Komponente von F in der Richtung der Tangente an die Linie an der Stelle des Elementes dr. Bilden wir dann das Integral $\int F\cos\varepsilon\, dr$ von einer Stelle A bis zu einer anderen B auf der Linie r, so erhält dieses Linienintegral den Wert $\int_A^B F\cos\varepsilon\, dr = V_A - V_B$; es ist also der Wert des Linienintegrals

nur abhängig von den Werten der Funktion V in den Punkten A und B, aber unabhängig von der Lage der Linie r zwischen A und B, also unabhängig vom Intergrationswege, und der Wert des Linienintegrales über eine geschlossene Kurve muß immer gleich Null sein. Die Bedingung $\operatorname{curl} F = 0$ kommt daher darauf hinaus, daß es keine in sich zurücklaufende Induktionsröhren geben kann (vergl. § 8), denn auf einer solchen wäre das Linienintegral bei einmaligem Umlauf gleich Fmal dem Umfang der Induktionslinie. Man nennt die Funktion V deren vollständiges Differential $F \cos \varepsilon \, dr$ ist, das Potential von F und wir können jetzt sagen, wenn $\operatorname{curl} F = 0$ ist, dann hat F ein Potential.

§ 19. Bestimmung des Potentials aus der Verteilung der elektrischen Kraft.

Die nächste Aufgabe ist, die Funktion V zu bestimmen, wenn die Verteilung des Vektors F gegeben ist, also V zu bestimmen aus den Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -X, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -Z.$$

Differentieren wir diese Gleichungen noch einmal nach x, y und z und addieren sie, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right);$$

wir erhalten also rechts den Ausdruck, den wir bereits die Divergenz des Vektors F genannt haben und mit div. F oder einfach mit δ bezeichnen wollen. Wir haben also

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\delta$$

und überall, wo keine Quellpunkte von Flußröhren vorhanden sind, sahen wir bereits das dort $\delta = 0$ war. Die Funktion V bestimmt sich also schon allein aus der Lage und Verteilung der Quellpunkte.

Die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung wird in der Potentialtheorie behandelt; in unserem Falle können wir die zu erwartende Lösung unserem hydrodynamischen Gleichnisse entnehmen. Entspricht nämlich die Funktion V dem Drucke in der Flüssigkeit, so muß

ihre Form durch den in § 12 für den durch eine Anzahl von Einheitsquellen hervorgerufenen Druck gegebenen Ausdruck bestimmt sein. Dieser Ausdruck war $\frac{1}{4\pi k}\sum\frac{1}{r}$.

Wir beachten, daß die Anzahl von Einheitsquellen, die in einem Punkte entspringen, nach § 16 gleich dem Werte δ der Divergenz in diesem Punkte ist. Demnach schreiben wir $V = +\frac{1}{4\pi}\int\frac{\delta}{r}\,dv$, wo noch eine Integrationskonstante hinzugefügt werden kann. Der Faktor k ist hier fortgelassen, weil wir $\frac{\partial V}{\partial x} = -X$ festgesetzt hatten und nicht gleich $-\frac{1}{k}X$, was dem Produkt $\frac{v}{k}$ im hydrodynamischen Gleichnis entsprochen hätte. Daß dieser Wert von V tatsächlich eine Lösung obiger Differerentialgleichung ist, ergibt sich für alle Punkte, wo $\delta = 0$ ist, d. h. für alle Stellen außerhalb der Quellpunkte, unmittelbar auf folgende Weise. An diesen Stellen ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\int\delta\frac{x}{r^3}\,dv; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{1}{4\pi}\int\delta\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}\right)dv.$$

Bildet man ebenso $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ und addiert die drei Werte, so erhält man für alle Punkte, wo $\delta = 0$ ist, in der Tat

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

unserer Differentialgleichung ist also genügt.

Soll der Wert von V bestimmt werden für eine Stelle wo δ nicht gleich Null ist, so ist obige Ableitung unzulässig, weil dann unter dem Integral Glieder auftreten, die für $r = 0$ unendlich werden. In diesem Falle teilen wir den ganzen Raum, über den zu integrieren ist, in zwei Teile, eine kleine Kugel, die die betrachtete Stelle umschließt und den übrigen Raum. Das Potential V ist dann die Summe aus dem Anteil, den die kleine Kugel beiträgt und dem Anteil des übrigen Raumes; beide Teile können unabhängig voneinander berechnet werden. Nach dem vorigen wissen wir aber, daß der ganze Außenraum zu dem Werte von $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ nichts bei-

trägt, wir müssen daher nur noch den Wert dieses Ausdrucks für die kleine Kugel berechnen. Hierfür können wir aber die Kugel so klein wählen, daß innerhalb derselben δ als konstant angesehen werden kann. Es muß also der Wert von $\int \frac{dv}{r}$ für einen Punkt im Innern einer Kugel berechnet werden, über deren ganzes Volumen die Integration auszuführen ist. Ist der Abstand des betrachteten Punktes vom Kugelmittelpunkt gleich a und der Kugelradius gleich R. Konstruieren wir jetzt noch eine konzentrische Kugel mit dem Radius a, so wird die ganze Kugel dadurch in die Innenkugel und eine Hohlkugel zerlegt; für beide Teile berechnen wir das Integral für sich. Habe zunächst der Punkt eine beliebige Lage außerhalb einer Kugel, so führen wir Polarkoordinaten ein $(\varrho, \vartheta, \varphi)$, mit dem Kugelmittelpunkt als Ursprung. Dann ist das Volumenelement $dv = \varrho^2 d\varrho \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, wenn ϑ der Winkel zwischen r und a ist und φ der Winkel, um den die Ebene (ra) aus einer Anfangslage gedreht ist. Ferner ist $r^2 = \varrho^2 + a^2 - 2\varrho a \cos\vartheta$ und $r\,dr = a\varrho \sin\vartheta\, d\vartheta$. Es wird dann unser Integral

$$\int \frac{dv}{r} = \int\limits_{\varrho=0}^{R} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\varrho^2 d\varrho \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{r} = 2\pi \int\limits_{\varrho=0}^{R} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{\varrho^2 d\varrho \sin\vartheta\, d\vartheta}{r}$$

$$= \frac{2\pi}{a} \int\limits_{\varrho=0}^{R} \int\limits_{r=a-\varrho}^{a+\varrho} \frac{\varrho^2 d\varrho}{\varrho} \cdot \frac{r\,dr}{r} = \frac{4\pi}{a} \int\limits_{\varrho=0}^{R} \varrho^2 d\varrho = \frac{4\pi}{3a} R^3.$$

Dieser Wert gilt für alle Punkte außerhalb der Kugel bis an die Oberfläche heran. In dieser selbst wird er, weil hier $a = R$, $\int \frac{dv}{r} = \frac{4\pi R^2}{3}$.

Liegt dagegen der Punkt im Innern einer Hohlkugel mit den Radien R' und R, so kann die ganze Betrachtung beibehalten bleiben, nur daß als Integrationsgrenzen an Stelle von $a - \varrho$ und $a + \varrho$ zu setzen sind $\varrho - a$ und $\varrho + a$, entsprechend $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$. Es wird dann erhalten

$$\int \frac{dv}{r} = 4\pi \int\limits_{\varrho=R'}^{R} \varrho\, d\varrho = 2\pi (R^2 - R'^2).$$

Im ganzen Innern hat das Integral also einen konstanten Wert.

Der Gesamtwert des Integrales an einer Stelle im Innern einer Kugel, in der überall δ gleichen Wert hat, ist also

$$V = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\delta\,dv}{r} = \frac{\delta}{4\pi}\left(\frac{4\pi a^2}{3} + 2\pi(R^2 - a^2)\right) = \frac{\delta}{4\pi}\left(2\pi R^2 - \frac{2\pi a^2}{3}\right).$$

Diesen Ausdruck können wir jetzt aber nach den Koordinatenachsen differentiieren und erhalten, weil $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist und folglich $\frac{da}{dx} = \frac{x}{a}$ ist

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\delta}{3}x; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\delta}{3}y; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\delta}{3}z$$

und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\delta}{3}$$

und

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\delta.$$

Es ist also durch die angenommene Lösung unserer Differentialgleichung auch in den Punkten genügt, wo δ nicht gleich Null ist.

Aus dieser Lösung der Differentialgleichung folgt, daß, wenn ein Vektor solenoidale Verteilung besitzt, wie durch Versuche ermittelt werden muß, und in sich geschlossene Flußlinien des Vektors nicht existieren, daß dann der Vektor immer von einem Potential abgeleitet werden kann. Der Wert dieses Potentials läßt sich dann berechnen für jede Stelle als ein Summenausdruck, dessen einzelne Glieder umgekehrt proportional sind den Abständen zwischen der betreffenden Stelle und den Punkten, wo die Divergenz des Vektors endliche Werte hat. Die Komponente des Vektors selbst, in einer bestimmten Richtung, wird dann als Differentialquotient des Potentials in dieser Richtung durch einen ähnlichen Summenausdruck dargestellt, dessen einzelne Glieder dem umgekehrten Quadrat der entsprechenden Entfernung proportional sind, noch multipliziert mit dem Kosinus des Winkels zwischen der betreffenden Entfernung und der gewählten Richtung. Auf eine einzige Divergenzstelle, d. h. Stelle, wo die Divergenz nicht gleich Null ist, angewendet, heißt dies, das

Potential ist dem Abstand von der Divergenzstelle umgekehrt proportional und der Vektor selbst liegt in der Richtung von der Divergenzstelle fort und ist dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional. Die Verteilung des Vektors entspricht also derjenigen einer von der Divergenzstelle ausgehenden, nach dem Newtonschen Gesetz wirkenden Abstoßungskraft.

Aus den Eigenschaften der Potentialfunktion lassen sich weiterhin alle im vorigen Kapitel über die Druckverteilung in inkompressibelen Flüssigkeiten abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten auch auf rein mathematischem Wege herleiten, wir verweisen in Bezug hierauf jedoch auf die Bearbeitung der Theorie der Potentialfunktion in dieser Sammlung, da der Sinn der Sätze bereits im vorigen Kapitel klar gestellt ist.

§ 20. Vektor der Induktion, Kontinuität desselben.

Aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphen ging hervor, daß das Feld eines jeden Vektors mit solenoidaler Verteilung sich mathematisch vollständig berechnen läßt aus der Lage und dem Werte der einzelnen Divergenzpunkte, und man kann diese Punkte ansehen als die Ausgangspunkte der ganzen Erscheinung; durch sie wird der Vektor XYZ überall im Raume bestimmt. Da aber erfahrungsgemäß die Wirkung in verschiedenen Dielektriken ungleich ist, so ist die Wirkung selbst an jeder Stelle eines Dielektrikums erst bestimmt durch das Produkt $\frac{k}{4\pi}X$, $\frac{k}{4\pi}Y$, $\frac{k}{4\pi}Z$, wo $\frac{k}{4\pi}$ die spezifische Art des Dielektrikums, auf den Vektor XYZ zu reagieren ist. Es wurde hier $\frac{k}{4\pi}$ an Stelle des in dem hydrodynamischen Beispiel gebrauchten k gesetzt, lediglich aus dem Grunde, weil dadurch die jetzt benutzte Konstante k mit der als Dielektrizitätskonstante meist gebrauchten Größe in Übereinstimmung kommt. Man nennt den Vektor F mit den Komponenten XYZ den Vektor der elektrischen Kraft, dagegen den Vektor $\frac{k}{4\pi}F$ die elektrische Induktion oder die elektrische Verschiebung, ohne daß damit mehr gesagt sein soll, als daß die Wirkung an jeder Stelle erst erhalten wird durch Multiplikation der Kraft mit einer dieser Stelle, infolge des dort vorhandenen Dielektrikums zu-

kommenden Konstanten k. Diese Unterscheidung ist nötig, sobald das elektrische Feld verschiedene Dielektrika enthält. Durch den Vergleich mit der strömenden Flüssigkeit waren wir im vorigen Kapitel (§ 15) dazu geführt, anzunehmen, daß die elektrische Verschiebung sich von einem Dielektrikum in das andere kontinuierlich fortsetzt, so daß ihre Komponente senkrecht zur Trennungsfläche in beiden Medien die gleiche ist, während die tangentialen Komponenten sich wie die Indizes verhalten. Es ist dies natürlich zunächst nur eine willkürliche Annahme, wenn es auch die nächstliegende zu sein scheint, gerade wie die Annahme, daß die Wirkung der ersten Potenz des Vektors der elektrischen Kraft überall proportional ist. Beide Annahmen sind experimentell sehr schwer direkt zu prüfen. Diese Annahmen bilden aber eine Grundlage der Maxwellschen Theorie.

Die Annahme der Kontinuität der Induktion spricht sich aus in der Gleichung $kF_n - k'F'_n = 0$, wenn F_n und F'_n die Komponenten der elektrischen Kraft senkrecht zur Trennungsfläche bedeuten. Es folgt hieraus, daß auch der Fluß des Vektors der Induktion durch eine geschlossene Fläche, oder das Oberflächenintegral $\frac{1}{4\pi}\int kF\cos\vartheta\, ds$ verschwindet, auch wenn die geschlossene Fläche sich von einem Dielektrikum in das andere erstreckt. Dies ergibt sich auch rein mathematisch, wenn wir wieder setzen wie in § 17

$$\int kF\cos\vartheta\, ds = \int k(Xl + Ym + Zn)\, ds$$
$$= \int kX\, dy\, dz + \int kY\, dz\, dx + \int kZ\, dx\, dy$$

Um die drei einzelnen Integrale zu bestimmen, zerlegen wir die Fläche durch einen Schnitt s' längs der Trennungsfläche der Dielektrika in zwei Teile und bilden die Integrale getrennt. Sind kX_1 und $k'X'_2$ die Werte an der Fläche s, kX und $k'X'$ die Werte an der Fläche s', so wird

$$\int kX\, dy\, dz = \int \frac{\partial kX_1}{\partial x}\, dv + \int \frac{\partial k'X'_2}{\partial x}\, dv + \int (kX - k'X')\, dy'\, dz'$$

folglich wird das ganze Oberflächenintegral

$$\int kF\cos\vartheta\, ds = \int k\,\delta\, dv + \int k'\delta'\, dv + \int (kF_n - k'F'_n)\, ds'.$$

Die Divergenzen $k\delta$ und $k'\delta'$ sind aber gleich Null, weil in diesen Räumen keine Quellen liegen, und $kF_n - k'F'_n = 0$

nach unserer Annahme. Folglich ist der Fluß durch die ganze Oberfläche gleich Null.

Es folgt ferner, wenn n die Normale zur Trennungsfläche der Dielektrika ist, und V_k und V'_k die Potentialwerte des Vektors der Induktion auf beiden Seiten. $\frac{\partial V_k}{\partial n} = -\frac{k}{4\pi} F_n$, $\frac{\partial V'_k}{\partial n} = -\frac{k'}{4\pi} F'_n$, folglich $\frac{\partial V_k}{\partial n} - \frac{\partial V'_k}{\partial n} = 0$. Da ferner die tangentialen Komponenten von F auf beiden Seiten der Trennungsfläche die gleichen sind, folgt hieraus $V_k - V'_k =$ Konst. Das Potential macht also beim Übergang von einem Dielektrikum zum anderen an der ganzen Trennungsfläche denselben Sprung.

§ 21. Diskontinuität des Vektors der elektrischen Kraft.

Wesentlich anders verhält sich der Vektor der elektrischen Kraft, doch müssen wir erst feststellen, was wir unter demselben verstehen wollen, wenn zwei oder mehrere Dielektrika im elektrischen Felde sind. Die elektrische Kraft war der Anteil der im Felde auftretenden Wirkung, der sich ohne Rücksicht auf das Dielektrikum rein aus den geometrischen Verhältnissen der Divergenzpunkte ableiten läßt. Um ihm daher auch jetzt noch einen Sinn unterlegen zu können, nehmen wir an, die Dielektrizitätskonstante k sei überall im Felde die gleiche, dieselbe kann daher ganz unterdrückt werden, dafür halten wir aber für die Grenzfläche der Dielektrika die eben abgeleitete Beziehung fest, daß $V - V' =$ konst ist, und berechnen jetzt wieder den Fluß des Vektors der Kraft durch die Oberfläche s. Es wird dann

$$\int F \cos\vartheta \, ds = \int \delta \, dv + \int \left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V'}{\partial n} \right) ds',$$

hier umfaßt jetzt δ die Divergenzen aller außerhalb der Grenzfläche aber innerhalb s liegenden Punkte, diese können bei geeigneter Wahl der Oberfläche wieder gleich Null gesetzt werden. Dagegen ist $\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V'}{\partial n}$ jetzt nicht gleich Null, weil wir eben die Größen k und k' unterdrückt haben. Der Vektorfluß der elektrischen Kraft durch die Trennungsfläche zweier Dielektrika ist also nicht gleich Null, wir sagen daher, in Übereinstimmung mit allem bisherigen, für

den Vektor der elektrischen Kraft liegen in der Trennungsfläche neue Quellpunkte. Berechnen wir noch den Wert von $\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V'}{\partial n}$ so ist zu beachten, daß hier $\frac{\partial V}{\partial n} = F_n$ gesetzt ist, wir hatten aber angenommen $k F_n - k' F'_n = 0$. Hieraus ergibt sich $F_n - F'_n = \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V'}{\partial n} = \frac{k' - k}{k'} F_n$. Denken wir also das Medium k' durch das Medium k ersetzt, um den Vektor der elektrischen Kraft berechnen zu können, so sind dafür an der Grenzfläche Quellen für den Vektor der elektrischen Kraft anzunehmen von der Ergiebigkeit $\frac{k' - k}{k'} F_n = \frac{k' - k}{k} F'_n$. Es stimmt dies Ergebnis also wieder völlig mit dem in § 14 erhaltenen überein.

§ 22. Freie und wahre Elektrizität.

Nach dem im vorigen Paragraphen Auseinandergesetzten kann es den Anschein haben, als wenn die Einführung des Vektors der elektrischen Kraft durch die Natur der Verhältnisse nicht gegeben ist, denn der Begriff der elektrischen Kraft erhält erst einen Sinn, indem wir von der ungleichen Wirkung in den verschiedenen Dielektrizis, die doch wirklich vorhanden ist, abstrahieren. Dies scheinbar Gekünstelte verschwindet aber sofort, wenn wir beachten, daß in unseren Versuchen in der Regel nicht die Wirkung im Dielektrikum selbst, also die Induktion, beobachtet wird, sondern vielmehr die elektrische Kraft, denn wir beobachten mit Versuchskörpern, die an verschiedene Stellen des elektrischen Feldes gebracht werden, und das Dielektrikum des Feldes ist überall da, wo wir die Versuchskörper hinbringen, fast immer Luft. Wir messen daher tatsächlich nur Verhältnisse der elektrischen Kraft. Besonders deutlich tritt dies hervor, wenn wir beachten, daß alle durch elektrostatische Kräfte hervorgerufenen Anziehungs- und Abstoßungserscheinungen nach § 2 ebenfalls zurückzuführen sind auf vorangegangene Influenzladung der angezogenen Körper durch das Dielektrikum Luft hindurch. Wir haben es daher gerade bei diesen Erscheinungen, die eine messende Vergleichung mit mechanischen Vorgängen zulassen, immer

nur mit dem Vektor der elektrischen Kraft zu tun. Demgegenüber erscheint vielmehr der Vektor der Induktion nur als der den Erscheinungen unterlegte, während der Vektor der Kraft der beobachtete ist. Man wird entweder die Kraft oder die Induktion als die wichtigere von beiden Größen ansehen, je nachdem die Kraft als die Ursache der Induktion oder umgekehrt die Induktion als das vorangehende, aus dem die Kraftäußerungen folgen, angesehen wird.

Die mathematische Herleitung gestattete uns die Kraft als geometrische Größe zu berechnen, die vollständig bestimmt ist, wenn alle Divergenzpunkte der Kraft gegeben sind. Wir können dann diese Divergenzpunkte als Ausgangspunkte einer Wirkung ansehen, die mit dem umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung abnimmt. Diese Divergenzpunkte sehen wir dann als Sitz von Elektrizitätsmengen an und messen diese durch den Zahlenwert der Divergenz (vergl. § 16). Die so bestimmte Menge von Elektrizität wird die „freie Elektrizität" genannt; es ist eben die zur geometrischen Berechnung der Kraft verfügbare Elektrizität.

Sehen wir aber diese „freie Elektrizität" nicht als die Ursache der Erscheinungen an, sondern nur als mathematische Hilfsgröße, die die Berechnung erleichtert, und erblicken vielmehr das Wesen der Erscheinung in einem sich im Dielektrikum von Ort zu Ort ausbreitenden Zustand, worauf die Versuche im § 6 hinzuweisen scheinen, so tritt der Vektor der Induktion in den Vordergrund, und als Ausgangspunkte des Vorganges treten dann die Divergenzpunkte der Induktion auf, die ursprünglich durch Reibung an irgend einem Körper hervorgerufen sind. Die Divergenzpunkte der Induktion nennt man in diesem Sinne den Sitz „wahrer Elektrizität".

Der Unterschied der wahren und freien Elektrizität tritt deutlich dadurch hervor, daß alle wahre Elektrizität auch gleichzeitig freie Elektrizität ist, aber durchaus nicht umgekehrt alle freie Elektrizität auch wahre, denn die durch einen in ein elektrisches Feld gebrachten Isolator auftretende Erscheinung beruht auf freier Elektrizität, ohne daß in diesem Falle wahre Elektrizität vorhanden ist.

Wahre Elektrizität kann erzeugt werden, indem man zwei Körper aneinander reibt und dann trennt; beide Körper erhalten dann entgegengesetzt gleiche Mengen wahrer Elek-

trizität. Erzeugt man auf diese Weise ein elektrisches Feld, so kann ferner wahre Elektrizität erzeugt werden, indem man einen Körper von der Konstante $k = \infty$, einen vollkommenen Leiter, einen Metallkörper, in das Feld hineinbringt. Denn ist $k = \infty$, so kann im Innern dieses Körpers keine Induktion bestehen; die Oberfläche wird eine Niveaufläche, die Induktionsröhren stellen sich senkrecht zu ihr und müssen in ihr endigen, folglich befindet sich in ihr wahre Elektrizität.

§ 23. Zwang im Dielektrikum.

Für die Einführung des Vektors der Induktion, neben dem Vektor der Kraft, bedarf es noch einer weiteren Rechtfertigung. Wenn wir die mechanischen Anziehungskräfte zwischen zwei elektrisierten Körpern betrachten, so bedürfen diese, wenn wir den Vektor der elektrischen Kraft als das Wesentliche ansehen, keiner weiteren Erklärung, denn nach dieser Anschauung sind die elektrischen Stellen auf den Körpern Ausgangspunkte von in die Ferne wirkenden Kräften, mit denen zunächst die Elektrizitätsmengen sich zu bewegen streben, diese nehmen dann aber die körperlichen Träger der Elektrizität mechanisch mit sich fort. Anders liegt es, wenn wir die Induktion als das Wesentliche ansehen, und die Möglichkeit der Bildung eines Vektors der Kraft nur als mathematische Konsequenz aus der solenoidalen Verteilung der Induktion ansehen. In diesem Falle müssen wir noch nachweisen, daß auch die zwischen zwei elektrischen Körpern wirkenden, mechanischen, scheinbaren Fernkräfte sich auch berechnen lassen als ein sich von Ort zu Ort durch das Dielektrikum hindurch sich verfolgen lassender mechanischer Druck oder Zug. Dazu berechnen wir die zwischen zwei Körpern wirkende Kraft, in der Art, wie wir es bereits kennen. Das von einem System von Divergenzpunkten an einer Stelle hervorgerufene Potential ist nach § 19 $V_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\delta_1}{r} dv_1$, wo zu integrieren ist über einen Raum, innerhalb dessen alle Punkte mit endlichen Werten von δ_1 liegen. Hieraus ergibt sich als Komponente in der X-Richtung des Vektors der elektrischen Kraft

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\delta_1}{r^2} \frac{x_1 - x'}{r} dv_1,$$

wenn $x'y'z'$ die Koordinaten des Punktes sind, in welchem die Kraft bestimmt wird und $x_1\, y_1\, z_1$ die Punkte mit endlichem δ_1. Diese Kraft wirkt jetzt auf alle Punkte des Körpers v_2, in welchem δ_2 endliche Werte hat und zwar auf jeden Punkt δ_2, proportional mit dem Werte von δ_2, also ist die Gesamtkraft beider Körper aufeinander in der X-Richtung

$$X = -\frac{1}{4\pi}\int \delta_2 \frac{\partial V_1}{\partial x}\, dv_2.$$

Hierin können wir noch die Größe δ_2 ersetzen durch die Beziehung $\delta_2 = \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}$ und erhalten dann als Komponente der Kraft in der X-Richtung

$$X = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}\right) dv_2;$$

hierbei ist die Integration auszuführen über eine beliebige Fläche, die nur den Körper δ_2 vollständig einschließt und den Körper δ_1 vollständig ausschließt, die also beide Körper vollständig voneinander trennt.

Die Größe X ist also bestimmt durch ein Raumintegral; wir hatten nun im § 17 bereits den Fall, daß ein Raumintegral sich ersetzen ließ durch ein Integral über die Oberfläche des betreffenden Raumes. Es war dies möglich, wenn die unter dem Raumintegral stehende Größe die Form hatte $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$. Auf diese Form kann aber der Ausdruck in unserem Integral gebracht werden. Setzen wir $V = V_1 + V_2$, so wird der Ausdruck für X nicht geändert, wenn wir V_2 durch V ersetzen, denn da nur über den Raum V_2 integriert wird, kommt durch diese Erweiterung von V_2 nichts neues hinzu. Ebenso kann auch V_1 zu V erweitert werden, denn dadurch werden nur Größen $\frac{\partial V_2}{\partial x}$ hinzugefügt in Punkten des Körpers δ_2, also nur Kräfte, die die Teile dieses Körpers aufeinander ausüben; diese heben sich aber alle gegenseitig fort. Also haben wir

$$X = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dv_2.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\right)-\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Setzen wir daher

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=8\pi p_{xx},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2=8\pi p_{yy},$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2=8\pi p_{zz}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}=4\pi p_{yz}=4\pi p_{zy},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}=4\pi p_{zx}=4\pi p_{xz},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}=4\pi p_{xy}=4\pi p_{yx},$$

so wird der zu integrierende Ausdruck von der Form

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z},$$

das heißt, er hat eine solche Form, daß das Raumintegral sich durch ein Oberflächenintegral über die Oberfläche von v_2 ersetzen läßt. Damit ist dann aber in der Tat gesagt, daß die ganze mechanische Wirkung des Körpers δ_1 auf den Körper δ_2 sich ansehen läßt als übertragen durch die beliebig zwischen beiden Körpern hindurchgehende Fläche v_2 derart, daß jedem Oberflächenelement dieser Fläche ein ganz bestimmter Anteil an der Übertragung zukommt. Die nähere Art dieser Übertragung übersehen wir leicht, wenn wir an-

nehmen v_2 sei eine Niveaufläche, und die nach Innen gerichtete Normale sei die Richtung der X-Achse, dann ist $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ und $\frac{\partial V}{\partial x}$ sei dann gleich P. Es werden dann alle $p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0$ und es wird

$$p_{xx} = \frac{1}{8\pi} P^2; \; p_{yy} = p_{zz} = -\frac{1}{8\pi} P^2.$$

Es ist aber p_{xx} die Komponente des Vektors, über den das Oberflächenintegral zu bilden ist, in der Richtung der Normalen zur Oberfläche und p_{yy}, p_{zz} sind die Tangentialenkomponenten.

In Worten läßt sich dies Resultat auch folgendermaßen aussprechen: Im Medium zwischen zwei elektrischen Körpern besteht ein Zwangszustand an jeder Stelle, der beide Körper gegeneinander zu bewegen strebt, derart, daß in der Richtung der Induktions- oder Kraftlinien an jeder Stelle ein Zug von der Größe $\frac{1}{8\pi} P^2$ besteht, der die Kraftlinie nach Art eines elastischen Fadens zusammenzuziehen sucht und ein Druck in allen Richtungen senkrecht zu den Kraftlinien von numerisch gleicher Größe, der die Kraftlinien auseinander drängt.

Wir können also in der Tat die mechanischen Kräfte zwischen zwei elektrischen Körpern ebensowohl aus den elektrischen Kräften als Fernkräften herleiten, als auch aus denselben Kräften berechnen, wenn sie in Gestalt eines Zuges und Druckes zwischen den Kraftlinien von Ort zu Ort weiter wirken.

Viertes Kapitel.

Das elektrostatische Maßsystem.

§ 24. Einheit der Menge freier Elektrizität.

Wir sind durch die Entwickelungen des vorigen Kapitels bereits dazu gelangt, die Begriffe: elektrische Kraft, elektrische Verschiebung und Elektrizitätsmenge zu bilden und mit ihnen zu rechnen, ohne noch irgend ein Maß festgesetzt zu haben, nach welchem wir diese Größen messen können. Die Möglichkeit einer zahlenmäßigen Vergleichung beruhte einerseits auf der Konstruktion der nach einer willkürlichen kleinen geometrischen Einheit hergestellten Einheitsröhren und auf der durch die Versuche des ersten Kapitels ermöglichten Kalibrierung eines Elektrometers in gleichwertige Grade, indem wir stillschweigend die Voraussetzung machten, daß gleiche, auf gleiche Art gewonnene Elektrisierungsmengen sich, ohne sich zu stören, in unserem Elektroskop addieren. Haben wir noch über diese letztere uns als Einheit dienende Elektrisierungsmenge eine Bestimmung getroffen, derart, daß wir sie jederzeit reproduzieren können und daß wir die verschiedenen, zu verschiedenen Zeiten und Umständen zur Kalibrierung dienenden Einheitsmengen untereinander vergleichen können, so können wir, da die Konstruktion der Einheitsröhren dann auf das metrische Maßsystem gegründet werden kann, alle in der Elektrostatik vorkommenden Größen vollkommen messen, bis auf die Konstante k; über diese erfahren wir aber durch die Versuche immer nur ein Verhältnis $\frac{k}{k'}$, bei allen messenden Vergleichungen ist daher eine selbständige Maßeinheit für k nicht erforderlich.

An Möglichkeiten, für die Elektrizitätsmenge eine unveränderliche Einheit festzusetzen, gibt es ebensoviele, als es Beziehungen gibt zwischen elektrischen Erscheinungen und anderen in festem Maße ausdrückbaren Vorgängen. Für die Elektrostatik kann nur eine derartige Beziehung in Betracht kommen, das ist die Größe der durch eine Elektrizitätsmenge hervorgerufenen mechanischen Kraft. Laden wir zwei Probekugeln mit den Elektrizitätsmengen δ_1 und δ_2 nach unserem willkürlichen Maß, so ist die zwischen ihnen wirkende mechanische Kraft nach unserer Schreibweise gleich $\frac{\delta_1 \delta_2}{4\pi r^2}$. Halten wir jetzt an der bisherigen Darstellung fest, daß aus der Elektrizitätsmenge Eins eine Einheitsröhre hervorgehen soll, so müssen wir diejenige Elektrizitätsmenge als Einheit nehmen, welche auf die gleiche Menge in der Einheit der Entfernung die in mechanischem Kraftmaß (Dynen) gemessene Kraft $\frac{1}{4\pi}$ ausübt. Es wäre dies die aus der Natur der Verhältnisse am unmittelbarsten hervorgehende Festsetzung; diese ist auch von Heaviside in seinen wichtigen späteren Arbeiten eingeführt worden. Praktisch eingeführt und meist verbreitet ist jedoch die Festsetzung, daß die Kraft zwischen zwei Einheiten der Elektrizitätsmenge in der Entfernung Eins selbst der Einheit gleich sein soll, wenn $k = 1$ ist. Es hat das zur Folge, daß aus der Elektrizitätseinheit nicht eine Kraftröhre, sondern 4π-Kraftröhren austreten, und daß infolgedessen der Faktor 4π in den meisten auf dieses System gegründeten Formeln mitgeführt werden muß. Die Bedingung, daß in diesem Maßsystem die Konstante des Dielektrikums, in welchem die Messung der mechanischen Kraft erfolgt, also der Luft, numerisch gleich Eins gesetzt wird, enthält keine neue Beschränkung in sich, solange man nicht im stande ist, die Dielektrizitätskonstanten absolut zu messen, sondern nur relativ gegeneinander. Gelingt es aber einmal, das Wesen der dielektrischen Eigenschaft, auf welcher das spezifische Verhältnis der Wirkung zur elektrischen Kraft im Dielektrikum beruht, aufzuklären und aus anderen meßbaren Erscheinungen herzuleiten, so kann diese Ermittelung nicht ohne Einfluß auf das elektrische Maßsystem sein, indem dieser jetzt gleich Eins gesetzten Konstanten k dann wahrscheinlich ein bestimmter anderer Wert beigelegt werden muß. Man tut

daher gut, festzusetzen, daß aus jeder Elektrizitätsmenge Eins die Anzahl 4π-Kraftlinien austreten sollen und daß dann zwischen zwei Einheiten die Kraft k herrscht.

Bezeichnen wir mit e die Elektrizitätsmengen, in diesen Einheiten gemessen, und mit δ, wie bisher, die Divergenzen der elektrischen Kraft, so haben wir daher $e = \frac{\delta}{4\pi}$ und infolgedessen haben wir auch die Laplace-Poissonsche Gleichung (§ 19) zu schreiben:

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi e.$$

§ 25. Einheit der wahren Elektrizität.

Die im vorigen Paragraphen abgeleitete Einheit der Elektrizitätsmenge ergibt, weil sie aus der Kraft abgeleitet wurde, naturgemäß die Einheit der freien Elektrizität. Wir sahen, daß von der freien Elektrizität wohl zu unterscheiden die wahre Elektrizitätsmenge ist. Da der Vektor der Induktion stets das $\frac{k}{4\pi}$-fache des Vektors der Kraft ist, so ist auch seine Divergenz gleich $\frac{k\delta}{4\pi}$, folglich wird die Menge der wahren Elektrizität, wenn wir sie mit ε bezeichnen, $\varepsilon = ke$, wenn eine Induktionslinie aus einer Einheit hervorkommen soll. Aus dieser Festsetzung ergibt sich, daß die Divergenz des Vektors der Induktion gleich ε ist, während die Divergenz des Vektors der Kraft gleich $4\pi e$ war. Wird $k = 1$ gesetzt, so tritt ein Unterschied zwischen den wahren und freien Elektrizitätseinheiten nicht hervor; schon daran zeigt sich, wie wichtig es ist, in allen Untersuchungen, die auf das Wesen der elektrischen Vorgänge eingehen wollen, die Konstante k nicht zu vernachlässigen.

§ 26. Beispiel zur Unterscheidung wahrer und freier Elektrizität.

Im § 19 hatten wir das Potential V der elektrischen Kraft bestimmt und erhalten $V = \int \frac{\delta}{4\pi r} dv$. Nach Einführung der festgesetzten Einheiten erhalten wir daher

$$V = \int \frac{e}{r} dv = \int \frac{\varepsilon}{kr} dv.$$

Es zeigt sich also, daß der Wert des Potentiales abhängig ist von den Dielektrizitätskonstanten, wenn man ihn aus den wahren Elektrizitätsmengen berechnet, unabhängig dagegen, wenn er aus den freien Elektrizitätsmengen berechnet wird. Dasselbe gilt von der in irgend einem Punkte des Feldes wirkenden elektrischen Kraft; denn berechnen wir die X-Komponenten dieser Kraft im Koordinatenanfang, so erhalten wir

$$X = -\int \frac{e x}{r^3} dv = -\int \frac{\varepsilon x}{k r^3} dv.$$

Im allgemeinen ist es daher das einfachste, das Potential und die elektrische Kraft aus den freien Elektrizitäten zu berechnen (vergl. auch § 24), sobald es möglich ist, die freien Elektrizitätsmengen zu bestimmen. Aus folgendem Beispiel geht der Unterschied klar hervor. Sind zwei Probekugeln mit bestimmten gleichartigen Elektrizitätsmengen geladen, so stoßen sie sich mit einer gewissen Kraft ab. Solange die Kugeln sich in Luft befinden, deren Dielektrizitätskonstante wir gleich Eins setzen, ist es gleichgiltig, ob wir die Kraft aus der wahren oder freien Ladung berechnen, denn beide sind dann gleich $\frac{e_1 e_2}{r^2} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r^2}$. Tauchen wir aber jetzt die Kugeln in eine isolierende Flüssigkeit, etwa Benzin ein, ohne ihren Abstand zu ändern, so kann dadurch die wahre Elektrisierungsmenge, die den Kugeln ursprünglich mitgeteilt wurde, sich nicht ändern. Kannten wir diese Mengen vor dem Eintauchen, so kennen wir jetzt die wahren Elektrizitätsmengen, und die Kraft muß gleich $k \frac{e_1 e_2}{k^2 r^2}$ sein, also auf das $\frac{1}{k}$ fache der vorherigen zurückgehen. Bringen wir sie dann aber auf dasselbe Potential, das sie in Luft hatten, indem wir sie mit zwei großen geladenen Körpern, die vorher mit ihnen gleiches Potential hatten, leitend verbinden, so fließt wahre Elektrizität zu ihnen über, sie erhalten wieder die gleichen freien Ladungen und ziehen sich an mit einer Kraft $\frac{k e_1 e_2}{r^2}$, also k mal so stark wie in Luft.

§ 27. Energie des elektrischen Feldes, bezogen auf die freie Elektrizität.

Jedes System von Körpern, zwischen denen mechanische Kräfte wirken, stellt einen gewissen Vorrat von Energie dar, der in eine andere Form, z. B. die lebendige Kraft bewegter Körper, umgewandelt werden kann, sobald die Körper dem Antrieb durch die Kräfte folgen können. So ist auch durch ein elektrisches Feld eine gewisse Menge elektrische Energie aufgespeichert, dadurch, daß die an den Grenzen des Feldes vorhandenen Elektrizitätsmengen Wirkungen hervorrufen, durch welche die das Feld begrenzenden Körper sich gegeneinander zu bewegen suchen. Dieses Energiequantum berechnen wir, indem wir zunächst die Energie berechnen, die durch zwei an zwei Stellen im Abstande r voneinander konzentrierte, freie Elektrizitätsmengen e_1 und e_2 dargestellt wird. Diese Elektrizitätsmengen wirken aufeinander mit einer Kraft $-\frac{k\,e_1\,e_2}{r^2}$. Wird der Abstand um dr geändert, so wird dabei die Arbeit $-\frac{k\,e_1\,e_2}{r^2}\,dr$ geleistet; wir erhalten daher die gesamte Energie, die durch die Anwesenheit der beiden Elektrizitätsmengen im Abstande r voneinander dargestellt wird, indem wir die eine derselben aus unendlicher Entfernung bis auf den Abstand r an die andere herangebracht denken; die gesamte dabei zu leistende Arbeit ist dann der gesuchte Energievorrat, denn diese Energiemenge kann durch das Wirken der elektrischen Kräfte als lebendige Kraft wiedergewonnen werden. Dieser Energiewert ist also $T = -\int_{\infty}^{r} \frac{k\,e_1\,e_2}{r^2}\,dr$. Da $k\,e_1\,e_2$ konstant sind, läßt sich die Integration ausführen und es wird $T = \frac{k\,e_1\,e_2}{r}$. Die Gesamtenergie, die in einem elektrischen Felde aufgespeichert ist, erhalten wir dann aber, indem wir diesen Ausdruck zweimal über alle vorhandenen Mengen freier Elektrizität integrieren, einmal, indem wir jede Menge als dem Faktor e_1 in obiger Formel entsprechend ansehen und das zweite Mal als e_2. Dabei sei im Volumenelement dv_1 die Elektrizitätsmenge e_1 und in dv_2 e_2 enthalten. Da wir so jedes Werte-

paar $e_1 e_2$ zweimal erhalten, haben wir das Doppelintegral noch zu halbieren. Es wird also die Gesamtenergie

$$T = \frac{k}{2} \iint \frac{e_1 e_2}{r} dv_1 dv_2,$$

die Größe k kann hier vor das Integralzeichen gesetzt werden, da es bei Einführung der freien Elektrizitäten einfach die Konstante des Normaldielektrikums, also der Luft oder des Vakuums ist. Man nennt den Ausdruck $\iint \frac{e_1 e_2}{r} dv_1 dv_2$ auch das Potential der Elektrizitätsmengen auf sich selbst, und es zeigt sich, daß dieses gleich dem $\frac{k}{2}$ fachen der Energie des Systems ist, und man kann auch schreiben $T = \frac{k}{2} \int V_1 e_2 dv_2$.

§ 28. Andere Formen der Energie des Feldes.

Diese Formel stellt die Energie des Systems allgemein dar, gleichgiltig, ob das elektrische Feld aus einem einzigen oder mehreren Dielektriken zusammengesetzt ist, denn bei der Benutzung der freien Elektrizitäten wird eben alles auf eine Normaldielektrizitätskonstante reduziert. Die Energie wird hier berechnet aus dem Fernwirkungsgesetz; hält man dieses Gesetz aber nur für ein scheinbares, das nur aus den besonderen mathematischen Eigentümlichkeiten hervorgeht, so muß sich der Ausdruck für die Energie auch noch umformen lassen, so daß jede Beziehung auf die freien Elektrizitäten daraus verschwindet. Dies gelingt folgendermaßen.

Wir hatten unter der Divergenz eines Vektors F verstanden die mathematische Funktion $\operatorname{div} F = \frac{\partial l F}{\partial x} + \frac{\partial m F}{\partial y} + \frac{\partial n F}{\partial z}$, wenn l, m, n die Richtungskosinusse von F sind. In unserm Falle ist auch das Produkt $V_1 F_2$ ein Vektor, der die Richtung von F_2 hat; also können wir auch schreiben:

$$\operatorname{div}(V_1 F_2) = \frac{\partial l V_1 F_2}{\partial x} + \frac{\partial m V_1 F_2}{\partial y} + \frac{\partial n V_1 F_2}{\partial x},$$

oder

$$= V_1 \operatorname{div} F_2 + F_2 \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} l + \frac{\partial V_1}{\partial y} m + \frac{\partial V_2}{\partial z} n \right).$$

Der Klammerausdruck ist aber gleich dem Vektor $-F_1$, denn F_1 sind die von den Elektrizitäten e_1 hervorgerufenen Kräfte und F_2 die von e_2 hervorgerufenen; e_1 und e_2 sind aber dieselben Elektrizitätsmengen, die nur wegen der doppelten Integration im Ausdruck für die Energie die verschiedenen Indizes erhielten. Wir haben also, wenn wir noch $\operatorname{div} F_2 = 4\pi e_2$ setzen, $\operatorname{div}(V_1 F_2) = 4\pi V_1 e_2 - F_2 F_1$. Integrieren wir jetzt beide Seiten nach Multiplikation mit dv über den ganzen Raum, so haben wir links ein Raumintegral über eine Divergenz; dies kann aber stets durch das Oberflächenintegral über den Vektor selbst ersetzt werden (§ 17). Wir erhalten also links das Integral $\int (V_1 F_2) \cos\vartheta\, ds$. Da die Integration sich über den unendlichen Raum erstrecken soll, im unendlichen aber das Potential V_1 der im endlichen liegenden Elektrizitäten e_1 gleich Null wird, so wird das ganze Integral gleich Null, und es wird $4\pi \int V_1 e_2\, dv = \int F_1 F_2\, dv$. Durch Vergleichung mit dem Ausdruck für die Energie ergibt sich also

$$T = \frac{k}{8\pi}\int F_1 F_2\, dv.$$

Dieser Ausdruck setzt seiner Herleitung nach zunächst noch voraus, daß wir es mit einem homogenen Dielektrikum zu tun haben. In diesem können wir dann $\frac{k}{4\pi} F_2$ als Vektor der Verschiebung ansehen und erhalten dann, wenn wir diesen mit D bezeichnen $T = \frac{1}{2}\int D F\, dv$, wo wir den Index bei F jetzt fortlassen können. Jetzt sagt dieser Ausdruck aber aus, daß die Energie des Systems auch berechnet werden kann, indem in jedem Volumelement das Produkt aus der dort herrschenden Kraft und Verschiebung gebildet wird und diese Werte über das ganze Feld integriert werden.

Gehen wir jetzt von dem Integralausdruck zu dem Differentialausdruck über und setzen den Beitrag, den jedes Volumelement zu der Gesamtenergie liefert, $\frac{1}{2} D F\, dv = dT$, so liegt darin zwar stets eine neue Hypothese, wie bei jedem Übergang vom Integral zum Differential, aber diese Hypothese ist in diesem Falle so unmittelbar in Übereinstimmung

mit der ganzen Anschauung, daß die elektrische Wirkung von Ort zu Ort sich im Dielektrikum ausbreitet, daß diese Hypothese als die nächstliegende und einfachste als zulässig erscheint. Geben wir aber dieses zu, so folgt dann als selbstverständlich, daß durch diesen Ausdruck die Energie auch in dem Falle dargestellt wird, daß das Feld aus verschiedenen Dielektriken zusammengesetzt ist.

Danach ist also die an irgend einer Stelle des Feldes aufgespeicherte Energie gleich dem halben Produkt aus der elektrischen Kraft und der Verschiebung.

Wir können die Energie jetzt in folgenden Formen schreiben:

$$T = \frac{1}{2} k \int V_1 e_2 \, dv = \frac{1}{2} \int D F \, dv = \frac{k}{8\pi} \int F^2 \, dv = \frac{2\pi}{k} \int D^2 \, dv.$$

Hierzu kommt jetzt auch noch, wozu wir durch die angegebene Hypothese ebenfalls nunmehr berechtigt sind, daß wir in dem ersten Ausdruck $ke = \varepsilon$ setzen und dann erhalten

$$T = \frac{1}{2} \int V \varepsilon \, dv,$$

wo das Potential von den freien Elektrizitäten zu nehmen ist und mit den wahren zu multiplizieren.

§ 29. Energie eines Kondensators.

In dem besonderen Fall, wo das elektrische Feld erzeugt wird durch die Ladungen zweier leitender Körper, von denen der eine den andern vollständig umschließt, läßt sich der Ausdruck für die Energie wesentlich vereinfachen. Das Potential auf jedem Metallkörper ist an allen Stellen das gleiche, es sei auf dem inneren gleich V_i, auf dem äußeren V_a. Die Menge wahrer Elektrizität muß auf dem inneren entgegengesetzt gleich der auf dem äußeren sein, weil jede von dem inneren Körper ausgehende Induktionslinie auf dem äußeren endet, folglich wird:

$$T = \frac{1}{2} \int V \varepsilon \, dv = \frac{V_i}{2} \int \varepsilon \, dv + \frac{V_a}{2} \int \varepsilon \, dv = \frac{V_i - V_a}{2} E,$$

wenn mit E die gesamte Elektrizitätsmenge auf dem Innenkörper bezeichnet wird.

Ein derartiges System zweier Metallkörper heißt ein Kondensator und wir erhalten den Satz: Die Energie eines Kondensators ist gleich dem halben Produkt aus der Potentialdifferenz seiner Belegungen und der Ladung wahrer Elektrizität der einen Belegung. Da das Potential nur als Integral ursprünglich definiert ist, ist die Wahl des Nullwertes des Potentiales beliebig und wir können daher auch das Potential von dem Werte V_a als dem Nullwerte rechnen. Dann würde $T=\frac{V_i E}{2}$ sein. Diese Form hat dann besonderen Wert, wenn die Außenbelegung weit entfernt ist und mit der Grenze des unendlichen Raumes identifiziert werden kann. In diesem Falle kann man dann auch sprechen von dem Energiewerte, den ein einzelner geladener Metallkörper darstellt, genau genommen ist er jedoch dann stets anzusehen als die Innenbelegung eines unendlich ausgedehnten Kondensators und nach der Maxwellschen Auffassung steckt die Energie an allen Stellen des den Körper umgebenden Raumes.

§ 30. Einheit des Potentials und der Kapazität.

Bei einem Kondensator nennt man das Verhältnis der Elektrizitätsmenge, mit der die eine Belegung geladen ist, zu der Potentialdifferenz, zu der dadurch beide Belegungen gebracht werden, die Kapazität des Kondensators. Wird dieselbe mit C bezeichnet, so ist $C=\frac{E}{V_i-V_a}$ und die aufgespeicherte Energie ist dann $T=\frac{E^2}{2C}=\frac{C}{2}(V_i-V_a)^2$.

Um auch noch die Einheit zu bestimmen, in der die Kapazität zu messen ist, müssen wir zuvor die Einheit des Potentiales ermitteln. Es war das Potential definiert als die Größe $V=\int\frac{e}{r}dv+C$, wo C eine Integrationskonstante bedeutet (§ 19). Wir haben nun bereits im § 19 das Integral $\int\frac{dv}{r}$ bestimmt und aus der Ableitung folgte, daß

$$\int\frac{dv}{r}=\frac{4\pi}{a}\varrho^2\,d\varrho$$

ist, wenn die Integration über das Volumen einer Kugelschale

von der Dicke $d\varrho$ und dem Radius ϱ erstreckt wird und a der Abstand des Punktes, für den der Wert des Integrales berechnet wird, vom Kugelmittelpunkte ist. In der Kugelschale selbst wird dieser Wert $4\pi\varrho\, d\varrho$. Wir können uns nun vorstellen, daß in jedem Volumelement der Kugelschale eine Elektrizitätseinheit vorhanden ist, dann stellt uns dieser Ausdruck, bis auf eine Konstante, den Wert des durch die so verteilte Elektrizitätsmenge in jedem Punkte der Kugelschale hervorgerufenen Potentiales dar. Denken wir uns jetzt eine Metallkugel vom Radius ϱ mit der Elektrizitätsmenge $4\pi\varrho^2 d\varrho$ geladen, so können wir sagen, ohne irgend eine besondere Vorstellung über die Dicke der Schicht $d\varrho$, in welcher die Elektrizität auf dieser Kugel aufliegt, daß jedenfalls $4\pi\varrho\, d\varrho + C$ das Potential dieser Ladung auf der Kugel sein muß. Sehen wir die Kugel als Innenbelegung eines Kondensators an, dessen Außenbelegung unendlich fern ist, so können wir $C = 0$ setzen und finden dann als Potential einer Kugel vom Radius ϱ, die mit der Elektrizitätsmenge Eins geladen ist, einfach $V = \frac{1}{\varrho}$. Wir können daher jetzt als Einheit des Potentials dasjenige nehmen, zu welchem eine Kugel vom Radius Eins durch die freie Elektrizitätsmenge Eins geladen wird, wenn sie sich in einem unbegrenzten Dielektrikum befindet. Es ist nicht überflüssig, in diese Definition das Wort freie Elektrizitätsmenge aufzunehmen, denn nur dadurch wird die Definition zu einer bestimmten, wie aus dem Beispiel im § 26 deutlich hervorgeht.

Nach Festlegung der Einheit des Potentials ergibt sich die Einheit der Kapazität als diejenige Menge wahrer Elektrizität, durch die der Kondensator auf die Einheit der Potentialdifferenz geladen wird. Hier müssen wir die wahre Elektrizitätsmenge benutzen, denn nur so bleiben die Formeln für den Energieinhalt des geladenen Kondensators $T = \frac{E^2}{2C} = \frac{C}{2}(V_i - V_a)^2$ richtig. Wollten wir hier die freien Elektrizitätsmengen benutzen, so würde die Kapazität eines Kondensators nur von den geometrischen Ausmessungen abhängen und unabhängig sein von dem zwischen den Belegungen befindlichen Dielektrikum, was dem eingeführten Gebrauche widerspricht.

§ 31. Die Dimensionen der Maßeinheiten.

Zur vollständigen Kenntnis der elektrischen Maße ist jetzt noch die Feststellung ihrer Dimensionen erforderlich, das heißt, es muß ermittelt werden, wie sich die elektrischen Größen in den drei Grundmaßen Centimeter, Gramm, Sekunde ausdrücken lassen. Wir hatten festgestellt, daß die elektrische Kraft zu messen ist durch $\frac{k e_1 e_2}{r}$ und von der Art einer mechanischen Kraft ist. Eine solche wird aber als die einer Masse erteilte Beschleunigung bestimmt und hat daher die Dimension nach der bekannten Schreibweise $[MLT^{-2}]$. Da r selbst eine Länge ist, so muß $k e_1 e_2$ die Dimension $[ML^3T^{-2}]$ haben; folglich die

Einheit der freien Elektrizität $\left[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} k^{-\frac{1}{2}}\right]$ und die
Einheit der wahren Elektrizität $\left[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} k^{\frac{1}{2}}\right]$,

wo die Größe k entsprechend der Dielektrizitätskonstanten in der Dimensionsformel stehen bleiben muß, bis es gelingt, über das Wesen dieser Konstanten nähere Angaben zu erhalten. Ferner folgt für die Dimensionen:

Elektrische Kraft $\left[M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} k^{-\frac{1}{2}}\right]$,

Elektrische Verschiebung $\left[M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} k^{\frac{1}{2}}\right]$,

Potential der freien Elektrizität $\left[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} k^{-\frac{1}{2}}\right]$,

Kapazität $[Lk]$.

Fünftes Kapitel.

Bestätigung der Theorie durch die Erfahrung.

---

§ 32. Die eingeführten Grundannahmen.

Bei der Aufstellung der mathematischen Theorie waren mehrere, vereinfachende Annahmen gemacht, deren Notwendigkeit nicht unmittelbar aus den im ersten Kapitel beschriebenen Versuchen gefolgert werden konnte, und deren Zulässigkeit daher durch besondere Versuche in der Erfahrung geprüft werden muß. Als solche Annahmen wurden eingeführt:

1. Die Annahme, daß die Intensität der elektrischen Induktion an jeder Stelle umgekehrt proportional dem Querschnitt der dort sich ergebenden Induktionsröhre ist (§ 8 und § 16). Durch diese Annahme wird es möglich, die Verteilung der Induktion aus der Analogie mit dem Strömen einer Flüssigkeit abzuleiten.

2. Die Annahme, daß der Einfluß der verschiedenen Dielektrika auf die Induktion sich vergleichen läßt mit einem der Induktion selbst proportionalen Widerstand, der dem Strömen der inkompressiblen Flüssigkeit entgegentritt (§ 14 und § 20).

3. Die Annahme, daß die Gesamtenergie eines elektrostatischen Systems sich darstellt als die Summe der Energieinhalte aller Volumenelemente des elektrischen Feldes und daß jedes Element einen dem Produkt aus elektrischer Kraft und Verschiebung proportionalen Anteil liefert (§ 28). Von diesen Annahmen läßt sich die erste mit beliebig großer

Genauigkeit in der Erfahrung als richtig erweisen, so daß sich diese Annahme als die einzig zulässige erweist; das aus ihr folgende Coulombsche Gesetz ist ein wirkliches Naturgesetz. Die zweite Annahme läßt sich nur als zahlenmäßig in erster Annäherung zulässig erweisen; in ihr liegt der Gedanke ausgesprochen, daß die Wirkung sich nur von Ort zu Ort fortpflanzt, und dies zeigt sich als mit der Erfahrung nirgends im Widerspruch. Die dritte Annahme folgt als nächstliegende Folgerung aus der zweiten, kann jedoch durch elektrostatische Versuche mit den bisher bekannten Mitteln nicht geprüft werden; ihre erfahrungsmäßige Berechtigung folgt erst aus dem Nachweis der zeitlichen Ausbreitung der elektrischen Energie in den elektrischen Wellen.

§ 33. Coulombs Gesetz.

Die erste Annahme ist identisch mit der Annahme des Gesetzes, daß die von einem elektrisierten, kleinen Körper ausgehende Wirkung umgekehrt proportional mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, wie aus den Ableitungen des zweiten Kapitels hervorgeht (§ 12). Die Annahme, bezw. der Nachweis der Giltigkeit dieses Gesetzes, ersetzt vollkommen die erste Annahme. Die Richtigkeit dieses Gesetzes kann auf zwei Weisen nachgewiesen werden; erstens, indem festgestellt wird, daß zwei kleine elektrisierte Körper sich umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes anziehen, bezw. abstoßen. Zweitens, durch den Nachweis, daß im Innern von vollkommen geschlossenen Metallkörpern die elektrische Kraft gleich Null ist, und daß alle Elektrizität auf Metallen vollkommen auf die Oberfläche tritt. Der erste Nachweis macht dabei stillschweigend die Voraussetzung, daß die mechanische Kraft zwischen elektrisierten Körpern zu stande kommt dadurch, daß die materiellen Körper durch die auf ihre Ladungen wirkenden elektrischen Kräfte fortgeführt werden; der zweite Nachweis enthält die Voraussetzung, daß bei elektrostatischen Versuchen für Metalle die Konstante $k = \infty$ zu setzen ist.

Die experimentelle Herleitung des Gesetzes der Anziehung elektrisierter kleiner Körper ist von Coulomb zuerst ausgeführt; daher wird das Gesetz, daß elektrisierte kleine Körper nach dem umgekehrten Quadrat der Entfernung aufeinander wirken, das Coulombsche Gesetz genannt.

Coulomb befestigte an einem vertikalen, feinen Aufhängedraht einen horizontalen, isolierenden, leichten Stab und an einem Ende desselben eine vergoldete Hollundermarkkugel. Wurde diese Kugel geladen und wurde ihr eine andere ebenfalls geladene und isolierte Kugel genähert, so wirkte zwischen beiden eine Kraft, durch welche die bewegliche Kugel fortgeführt wurde. Durch Drehen am Aufhängepunkte des Drahtes konnte dann die bewegliche Kugel gezwungen werden, in ihre Ausgangsstellung zurückzukehren; die meßbare Torsion des Drahtes hielt dann der elektrischen Kraft das Gleichgewicht. Auf diese Weise konnte Coulomb feststellen, daß, wenn er den Kugeln die in willkürlichem Maße gemessenen Ladungen e_1 und e_2 erteilte, und wenn der Abstand r war, die Kraft zwischen ihnen proportional $\frac{e_1 e_2}{r^2}$ war.

Ein anderer, einfacherer Nachweis desselben Gesetzes läßt sich durch folgenden Versuch zeigen.

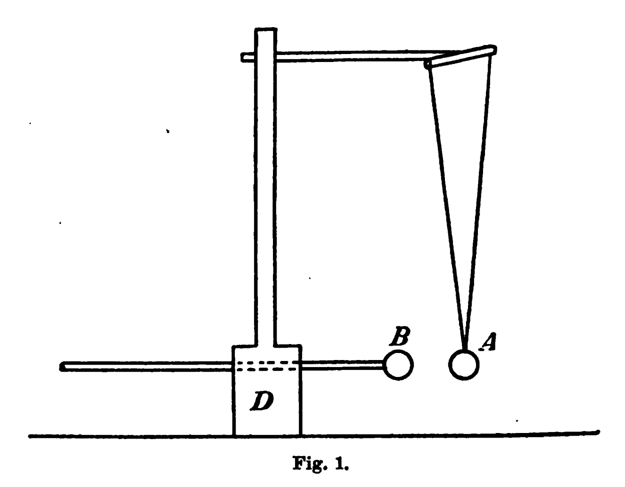


Fig. 1.

Eine Hollundermarkkugel A wird an zwei langen Kokonfäden pendelnd aufgehängt; ihr gegenüber wird die Kugel B an einem isolierenden Stab in der Stütze D horizontal verschiebbar angebracht. Schiebt man B bis zur Berührung von A vor und teilt B eine Ladung mit, so verteilt sich diese, wenn A und B gleich groß sind, auf beide Kugeln

zu gleichen Teilen. A wird dann abgestoßen, und zwar wird die Kraft, mit der die Schwerkraft A in seine Ruhelage zurücktreibt, proportional dem Abstande der Kugel A, von ihrer Ruhelage sein. Ist der Abstand der Mitten von B und A gleich r und die Strecke, um welche A aus seiner Ruhelage entfernt ist, a, so kann man jetzt r ändern, indem man B verschiebt. Ändert man r bis zu den Werten $2r$, $3r$, $4r$ u. s. w., so werden für a die Werte erhalten $\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{9}a$, $\frac{1}{16}a$ u. s. w. Berührt man ferner B mit einer gleich großen, isolierten und unelektrischen, leitenden Kugel, so nimmt man dadurch die Hälfte der Ladung von B fort; es sinkt dann a ebenfalls auf die Hälfte und entsprechend bei anderer Teilung der Ladung von B. Auf diese Weise ergibt sich ebenfalls das Coulombsche Gesetz.

Beträgt bei dieser Versuchsordnung die Länge der Aufhängefäden 1 m und das Gewicht der Kugel A $\frac{100}{981}$, also nahezu $\frac{1}{10}$ gr, und erteilt man beiden Kugeln derartige gleiche Ladungen, daß ihr Abstand 1 cm beträgt, wenn B bis in die Ruhelage von A vorgeschoben wird, so sind beide Kugeln mit der elektrostatischen Einheit der Elektrizität geladen. Denn in diesem Falle ist der Winkel, um den das Pendel aus der Ruhelage entfernt ist, im Bogenmaß $\frac{1\,\text{cm}}{1\,\text{m}} = \frac{1}{100}$; die Kraft, die die Kugel A in die Ruhelage treibt, ist daher $\frac{100}{981} \cdot 981 \cdot \frac{1}{100} = 1$ Dyne, und der Abstand der Kugel ist gleich 1 cm.

§ 34. Versuche von Faraday und Cavendish.

Coulombs Versuche bestimmen zunächst nur die Kräfte zwischen elektrisierten, kleinen Körpern; sie erstrecken sich aber nicht unmittelbar auf die Kräfte zwischen den Elektrizitätsmengen selbst, wenn dieselben auf oder an größeren Körpern sich entlang bewegen. Nun sahen wir aus den Versuchen des ersten Kapitels, daß die Elektrisierung an Metallen sich scheinbar, ohne Widerstand zu finden, frei unter dem Einfluß der elektrischen Kräfte bewegt. Eine Folge davon ist, daß auf der Oberfläche eines Metallkörpers

die Elektrizität stets so sich anordnen muß, daß die Gesamtheit der Elektrizitätsmengen keine Kraftkomponente in der Richtung tangential zur Oberfläche erzeugt; denn, existierte noch eine solche Kraftkomponente, so würde die Elektrizität sich unter ihrem Einfluß noch fortbewegen, die endgiltige Anordnung wäre also noch nicht erreicht. Die Oberfläche eines Metallkörpers ist also stets eine Niveaufläche.

Es lehrt uns nun aber ein Versuch Faradays, daß eine noch so starke Elektrisierung eines Metallkörpers an keiner Stelle im Innern desselben irgend eine Spur elektrischer Kraft zu erzeugen vermag; und bereits Cavendish hat gezeigt, daß ein elektrischer Metallkörper, der sich im Innern eines anderen Metallkörpers befindet und mit dem Äußeren leitend verbunden wird, seine Elektrisierung vollständig verliert. Aus jedem dieser Versuche, die sich mit der größtmöglichen Empfindlichkeit jederzeit wiederholen und bestätigen lassen, läßt sich nun herleiten, daß das einzig mögliche Fernwirkungsgesetz, das zu diesem Ergebnis führt, das Coulombsche Gesetz ist.

Da bei der Ausführung dieser Versuche die Form der Metallkörper vollkommen gleichgiltig ist, so können wir für die Berechnung die vereinfachende Annahme machen, daß dieselben Kugeln sind. Sehen wir nun die zwischen zwei Elektrizitätsteilchen wirkende Kraft zunächst als eine beliebige Funktion $F(r)$ der Entfernung r dieser Teilchen an, so können wir in Übereinstimmung mit dem früheren, als Potential dieser Kraft mathematisch die Größe $\int_r^\infty F(r)\,dr$ definieren (§ 18). Setzen wir nun zur Vereinfachung

$$\frac{\partial f(r)}{\partial r} = f'(r) = r\int_r^\infty F(r)\,dr,$$

so können wir jetzt das Potential einer gleichmäßig geladenen Kugel berechnen. Befinden sich in der Umgebung der Kugel keine weiteren elektrischen Ladungen, so muß aus Gründen der Symmetrie die Verteilung der Elektrizität an allen Punkten der Kugeloberfläche die gleiche sein. Befindet sich dann in der Flächeneinheit die Elektrizitätsmenge e und ist a der Kugelradius, so ist die Gesamtladung der Kugel $4\pi a^2 e$. Führen wir dann wieder Polarkoordinaten

(r, ϑ, φ) mit dem Kugelmittelpunkt als Zentrum ein, so wird $r^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta$, wenn b der Abstand eines beliebigen Punktes vom Zentrum ist, und das Flächenelement der Kugeloberfläche wird $a^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$ und es wird auch $r\,dr = ab \sin\vartheta \, d\vartheta$. Dann berechnet sich das Potential der ganzen Ladung in dem Punkte b zu

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e a^2 \sin\vartheta \frac{f'(r)}{r} \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi a^2 e \int_0^{\pi} \sin\vartheta \frac{f'(r)}{r} \, d\vartheta,$$

oder auch

$$V = \frac{2\pi a e}{b} \int_{r_2}^{r_1} f'(r) \, dr = \frac{2\pi a e}{b} \Big(f(r_1) - f(r_2) \Big).$$

Aus Faradays Versuch folgt nun, daß dies Potential im Innern der Kugel konstant oder $\frac{\partial V}{\partial b} = 0$ ist. Durch Differentiation erhalten wir also, da dann $r_2 = a - b$ und $r_1 = a + b$ ist

$$-\frac{1}{b^2}\Big[f(a+b) - f(a-b)\Big] + \frac{1}{b}\Big[f'(a+b) + f'(a-b)\Big] = 0.$$

Da b nicht unendlich sein kann, kann einmal der Faktor $\frac{1}{b}$ fortgelassen werden; das erste Glied wird dann aber wieder gleich $\frac{1}{2\pi a e} \cdot V$. Durch nochmalige Differentiation nach b folgt $f''(a+b) = f''(a-b)$. Diese Gleichung kann nur dann allgemein erfüllt sein, wenn $f''(r) = \text{Konst} = C_0$ ist, folglich wird $f'(r) = C_0 r + C_1$ und es ist

$$\int_r^{\infty} F(r) \, dr = \frac{f'(r)}{r} = C_0 + \frac{C_1}{r}$$

und schließlich

$$F(r) = \frac{C_1}{r^2},$$

das heißt, aus dem Faradayschen Versuch folgt als einzig mögliches Fernwirkungsgesetz das Coulombsche.

Die Berechnung für Cavendish' Versuch ergibt sich, wenn wir annehmen, daß der Innenkörper eine konzentrische Kugel ist. Habe die Außenkugel den Radius a und die

Gesamtladung a, die Innenkugel entsprechend b und β, so wird das Potential auf der Außenkugel

$$A = \frac{a}{2a^2} f(2a) + \frac{\beta}{2ab}\Big[f(a+b) - f(a-b)\Big]$$

und auf der Innenkugel

$$B = \frac{\beta}{2b^2} f(2b) + \frac{a}{2ab}\Big[f(a+b) - f(a-b)\Big];$$

wird dann eine leitende Verbindung zwischen beiden hergestellt, so wird $A = B$ und wir erhalten durch eliminieren von a

$$\beta = 2Ab \frac{bf(2a) - a[f(a+b) - f(a-b)]}{f(2a)f(2b) - [f(a+b) - f(a-b)]^2}.$$

Dieses β wird nun nach Cavendish gleich Null, folglich muß $b\,f(2a) - a[f(a+b) - f(a-b)] = 0$ sein, woraus wieder durch zweimalige Differentiation erhalten wird $f''(a+b) = f''(a-b)$. Also auch dieser Versuch führt auf das Coulombsche Gesetz.

§ 35. Bestimmungen von Dielektrizitätskonstanten aus Kondensatorversuchen.

Während in dieser Weise die Berechtigung der ersten, der im § 31 genannten Annahmen sich als eine vollkommene erweist, stößt die Prüfung der zweiten Annahme in der Erfahrung auf wesentlich größere Schwierigkeiten. Es kommt hierfür nicht nur darauf an, nachzuweisen, daß in einem Dielektrikum stets eine der elektrischen Kraft proportionale Wirkung besteht, sondern auch, daß diese Wirkung sich aus einem Medium in das andere in der Weise fortsetzt, wie in dem hydrodynamischen Gleichnis angenommen wurde. Da wir nun kein Mittel haben, die hier in Frage kommende Größe, die wir elektrische Verschiebung nannten, direkt zu beobachten, so können die hierher gehörenden Versuche nur indirekte Methoden ergeben. Es sind bisher drei wesentlich verschiedene Methoden versucht worden, die Wirkung eines elektrischen Feldes auf ein Dielektrikum zu studieren; die erste mißt die Kapazität eines Kondensators, in welchem die dielektrische Substanz ganz oder teilweise

durch eine andere ersetzt wird, die zweite mißt die auf einen isolierenden Körper ausgeübte bewegende Kraft, die dritte beobachtet die in einem Dielektrikum auftretenden Zug- und Druckerscheinungen, deren Existenz auf Grund dieser Anschauung nach § 23 gefordert wird.

Faraday hat zuerst beobachtet, daß, wenn in einem Kondensatorapparat die Luft durch einen anderen Isolator ersetzt wurde, die Kapazität des Kondensators sich änderte. Wir verstehen unter der Kapazität das Verhältnis der Menge der wahren Elektrizität, die der einen Belegung des Kondensators zugeführt werden muß, zu der dadurch hervorgerufenen Potentialdifferenz beider Belegungen. Hierbei ist die Potentialdifferenz aus der Menge der freien Elektrizität zu berechnen. Hatte der Kondensator zuvor das Dielektrikum vom Index k, und wird dann das Dielektrikum k' eingeführt, so war anfangs die Menge freier Elektrizität durch $\frac{\varepsilon}{k}$ bestimmt, und diese Größe ändert sich, wenn keine wahre Elektrizität beim Austauschen der Dielektrika zugeführt wird, in $\frac{\varepsilon}{k'}$, und in demselben Verhältnis ändert sich auch die Potentialdifferenz. Daraus folgt, daß das Verhältnis der Kapazitäten eines Kondentators gleich dem Verhältnis der Dielektrizitätskonstanten sein muß; also $\frac{C}{C'} = \frac{k}{k'}$. Man kann also durch Messen der Kapazitäten nach irgend einer Methode das Verhältnis der Dielektrizitätskonstanten bestimmen. Auch wenn in einem Kondensator die Luft nicht vollständig durch ein anderes Dielektrikum ersetzt wird, kann man aus der Bestimmung der Kapazität die Dielektrizitätskonstanten berechnen. Nach der Auffassung unserer Theorie muß nämlich eine Schicht von der Dicke d und der Konstanten k gleichwertig sein einer Schicht mit den Größen d' und k', wenn $kd = k'd'$ ist; denn es ist die elektrische Verschiebung an einer Stelle gleich kF; geht dann die Verschiebung senkrecht durch die Schicht hindurch, so ist der Gesamtwert der Verschiebung über die Strecke d gleich kFd. Ist daher obiger Gleichung genügt, so ist die Wirkung in der einen Schicht unter dem Einfluß derselben elektrischen Kraft genau gleichwertig derjenigen

in der andern Schicht. Besitzt dann ein Kondensator zwischen seinen Belegungen überall die gleiche Dicke des Dielektrikums (zwei konzentrische Kugeln, zwei parallele Platten) und ist seine Kapazität proportional der Dicke dieser Schicht, so ist es leicht, auf Grund obiger Überlegung die Änderung der Kapazität zu berechnen, wenn man einen Teil des Dielektrikums durch eine Schicht eines anderen ersetzt, deren Begrenzung den Belegungen parallel ist. Man denke sich die eingeführte Schicht d' wieder ersetzt, so daß für d' $\frac{k}{k'}d$ eintritt, und berechnet die Kapazität für die so reduzierte Dicke. Nach diesem Prinzip sind eine große Menge von Bestimmungen von Dielelektrizitätskonstanten mit den verschiedensten Mitteln ausgeführt worden, und wir werden in diesen Versuchen eine Bestätigung unserer Annahme erblicken können, wenn für dieselben Substanzen bei den verschiedensten Dimensionen der Kondensatoren und eingeschalteten Schichten und allen angewendeten Potentialdifferenzen immer dieselben Dielektrizitätskonstanten gefunden worden sind. In folgender Tabelle ist eine Zusammenstellung von auf diese Weise gefundenen Dielektrizitätskonstanten mit Angabe der Beobachter gegeben:

Hartgummi	2,08	Rosetti.
	3,15	Boltzmann.
	2,284	Gordon.
	2,21 bis 2,76	Schiller.
	2,72	Winkelmann.
	2,56	Wüllner.
Schellack	2,74	Gordon.
	3,10	Winkelmann.
	3,672	Donle.
	2,95 bis 3,73	Wüllner.
Paraffin	2,32	Boltzmann.
	1,977	Gibson und Barclay.
	1,9936	Gordon.
	2,29	Hopkinson.
	1,78 bis 2,17	Schiller.
	2,18	Winkelmann.
	2,29	Donle.
	1,96	Wüllner.

Schwefel	1,81	Rosetti.
	3,84	Boltzmann.
	1,78	Felici.
	2,58	Gordon.
	3,04	Wüllner.
Ricinusöl	4,78	Hopkinson.
	4,610	Palaz.
	4,82	Cohn und Arons.
	4,62	Salvioni.
Benzol	2,198	Silow.
	2,314	Quincke.
	2,207	G. Weber.
	2,218	Tomascewski.
	2,43	Winkelmann.
	1,948	Donle.
	2,38	Hopkinson.
	2,336	Palaz.
	2,2921	Negreano.
Äthylalkohol	26,5	Cohn und Arons.
	27,4	Winkelmann.
	24,29	Donle.
Schwefelkohlenstoff	2,628 bis 2,67	Hopkinson.
	2,739	Quincke.
	2,149	G. Weber.
	1,81	Gordon.
	1,997	Wüllner.

Die erwartete Übereinstimmung der auf verschiedene Weise beobachteten Werte der Dielektrizitätskonstanten ein und derselben Substanz, spricht sich in diesen Zahlen nur sehr unvollkommen aus, so daß man fast geneigt sein könnte, die Annahme als nicht berechtigt anzusehen. Indessen muß man bei Beurteilung dieser Zahlen mehrere Punkte beachten, die den Wert der einzelnen Zahlen erheblich beeinflußen können. Neben der Schwierigkeit der Ausführung genauer Beobachtungen auf diesem Gebiete, scheint vor allem geringe Verschiedenheit des verwendeten Materials von sehr bedeutendem Einfluß zu sein, so daß ein Teil der Differenzen namentlich bei den festen Körpern hierauf zurückzuführen sein mag. Außerdem hat das stets

mehr oder weniger vorhandene Leitvermögen auf die Kapazitätsbestimmung einen bedeutenden Einfluß in der Weise, daß infolge desselben die Kapazität bei länger dauernder Ladung im allgemeinen größer erhalten wird als bei kurzer Ladung. Dadurch erhält die experimentelle Definition der Kapazität und damit auch der Dielektrizitätskonstanten überhaupt eine gewisse Unsicherheit, die nur sehr schwer zu überwinden ist. Da nun bei den angeführten Messungen Ladungszeiten von ganzen Sekunden bis zu Milliontel Sekunden, wie sie bei Hertzschen Wellen vorkommen, verwendet sind, so erklärt sich ein sehr großer Teil der Differenzen aus diesen Verschiedenheiten. Theoretisch könnte man die mit den kürzesten Ladungszeiten ausgeführten Beobachtungen für die richtigsten halten, wenn bei diesen nicht wieder die Schwierigkeit hinzu käme, daß vielleicht bei diesen kurzen Zeiten die Elektrizitätsverteilung auf den Kondensatorbelegen noch nicht die gleiche ist, die der elektrostatischen Berechnung zu Grunde liegt. Hiernach darf die mangelnde Übereinstimmung der gefundenen Zahlen wohl nicht als eine Widerlegung unserer zweiten Annahme angesehen werden, aber die Berechtigung der Annahme kann auch bisher nur als eine erste Annäherung an die Tatsachen gelten, es bleibt durchaus noch unentschieden, ob die als elektrische Verschiebung eingeführte Größe wirklich streng proportional der elektrischen Kraft gesetzt werden darf; andere Versuche scheinen vielmehr darauf hinzudeuten, daß in die Beziehung zwischen der Verschiebung und der Kraft noch Glieder höherer Potenz aufzunehmen sind. Sollte sich dies bestätigen, so würde damit unsere Annahme nicht durchaus hinfällig sein, sondern sie würde nur als erste Annäherung an die Wirklichkeit zu gelten haben. Für eine genauere Berechnung würden noch Korrektionsglieder hinzuzufügen sein.

§ 36. Versuche von Boltzmann und Bezold.

Während in den bisher genannten Versuchen das Verhalten des Dielektrikums nur unter besonders einfachen Verhältnissen geprüft wurde, hat Boltzmann noch unter anderen Bedingungen die Dielektrizitätskonstanten ermittelt. Er verglich die Kraft, durch die eine aus einem Isolator hergestellte Kugel

in einem elektrischen Felde bewegt wurde, mit der auf eine Metallkugel gleicher Größe wirkende Kraft. Da diese Kraft herrührt von den auf dem Isolator auftretenden freien Elektrizitäten und diese eben durch die Dielektrizitätskonstanten bestimmt sind, so ist schon zu übersehen, auch ohne die erst in einem späteren Kapitel zu gebende vollständige Berechnung, daß auch auf diesem Wege die Dielektrizitätskonstante ermittelt werden kann. Boltzmann fand so folgende Werte: Schwefel 3,90, Hartgummi 3,48, Paraffin 2,32. Auch diese Werte reihen sich in die obigen Zahlenwerte genügend ein, so daß auch in ihnen eine Bestätigung der Annahmen in erster Annäherung erblickt werden kann.

Eine weitere Möglichkeit der Prüfung bietet sich durch die Untersuchung der Giltigkeit des Gesetzes der Ablenkung der Kraftlinien beim Übergang in ein anderes Dielektrikum, also des Gesetzes, daß $\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i'} = \frac{k}{k'}$ sein muß, wenn i und i' Eintritts- und Austrittswinkel sind. Einen derartigen Versuch hat v. Bezold gemacht, indem er eine Metallkugel in einen rechtwinkeligen Paraffinklotz einschmolz und elektrisch lud. Er beobachtete dann die Richtung, in der sich eine leicht drehbar aufgehängte Schellaknadel mit zwei an den Enden aufgesetzten und entgegengesetzt geladenen Hollundermarkkugeln einstellte. Es ergab sich, daß der Schnitt der so ermittelten Kraftlinien weiter hinter der Vorderfläche des Paraffins lag als die Messingkugel und daß dies dem Verhältnis der Dielektrizitätskonstanten des Paraffins entsprach. Der Abstand der Messingkugel von der Vorderfläche des Paraffins betrug 5 cm, der Schnittpunkt der Kraftlinien 11,5 cm. Das Verhältnis $\frac{11{,}5}{5} = 2{,}3$ muß der Dielektrizitätskonstanten des Paraffins bezogen auf Luft entsprechen, was mit den oben bereits angeführten Konstanten für Paraffin in Übereinstimmung steht.

§ 37. Versuche über den Zwang im Dielektrikum.

Eine dritte Reihe von Versuchen geht auf die Untersuchung des nach der ganzen Maxwellschen Vorstellungsweise notwendig im Dielektrikum auftretenden elastischen

Zwanges aus, und bildet dadurch indirekt ebenfalls eine Prüfung der Berechtigung unserer zweiten Annahme, zugleich aber auch die Grundlage für die Einführung der in der dritten Annahme ausgesprochenen Vorstellung von der Energieverteilung im Dielektrikum. Die Theorie hatte dazu geführt (§ 23) im Innern des Dielektrikums gewisse Zug- und Druckerscheinungen elastischer Art zu erwarten und diese Erscheinungen hat besonders Quincke in sehr bedeutenden Experimentaluntersuchungen genauer verfolgt. Diese Untersuchungen behandeln folgende verschiedene Fälle:

1. Wird in einem flüssigen Dielektrikum eine Luftblase zwischen die Platten eines Kondensators gebracht und der Kondensator geladen, so steht die Luft in der Blase unter einem veränderten Druck, der sich durch ein mittelst Kapillare an die Luftblase angeschlossenes Manometer messen läßt.

2. Infolge der Ladung des Kondensators wird die Luftblase selbst meßbar deformiert, woraus auf den auf sie wirkenden Druck und die Richtung desselben geschlossen werden kann.

3. Ist das Dielektrikum ein thermometerartiges Glasgefäß mit angesetztem Kapillarrohr, das mit einer leitenden Flüssigkeit gefüllt ist und selbst in Eis steht, so zeigt das Sinken der Flüssigkeit in der Kapillaren bei Laden eine Volumänderung des Gefäßes an.

4. Eine innen und außen belegte Glasröhre ändert ihre Länge, wenn die Belegungen geladen werden.

5. Eine gewölbte Glimmerplatte, der beiderseits Ladungen zugeführt werden, indem ihre Flächen vergoldet sind, ändert ebenfalls ihre Form. Bildet die Glimmerplatte den Abschluß eines Thermometergefäßes, so kann man aus der Bewegung der zur Füllung dienenden Flüssigkeit in der Kapillare beim Anlegen der Ladung auf die Größe der Formänderung schließen.

6. Dielektrische Flüssigkeiten, die in einem Thermometergefäß eingeschlossen sind, in welches gleichzeitig zwei Kondensatorplatten eingeschmolzen sind, haben Volumänderungen gezeigt nnd zwar nach Quincke zum teil Volumverminderungen, die nur durch die Anwesenheit elektrostatischen Zwanges zu erklären sind.

Alle diese verschiedenen Versuche haben im wesentlichen eine Übereinstimmung mit der Theorie gezeigt, wenn auch vielleicht aus ihnen schon hervorgeht, daß für die genaue Berechnung dieser Vorgänge die einfache Proportionalität zwischen der Wirkung im Delektrikum und der ersten Potenz der elektrischen Kraft nicht mehr ganz zulässig erscheint. Wir werden daher bei dem weiteren Ausbau der Theorie auf der angebenen Grundlage stets im Auge behalten müssen, daß sie nur eine erste Annäherung an die Wirklichkeit darstellen wird.

Als letzte Versuchsreihen zur Bestätigung der Grundlagen unserer Theorie sind jetzt noch die Nachweise anzuführen, daß der in einem Dielektrikum unter dem Einflusse der elektrischen Kraft auftretende Zwang sich auch dadurch kenntlich macht, daß das vorher homogene Dielektrikum jetzt optisch doppelbrechend wird. Kerr beobachtete, daß Glas unter dem Einflusse der elektrischen Kraft doppelbrechend wurde, in dem Sinne, als wenn es in der Richtung der Kraftlinien komprimiert wurde, während Bernstein in der gleichen Richtung gedehnt erscheint. Auch für eine große Zahl von Flüssigkeiten wurde die Doppelbrechung unter dem Einfluß der elektrischen Kraft von Kerr beobachtet, und diese Angaben wurden zum teil von Röntgen und Quincke nachgeprüft und bestätigt gefunden, und zwar zeigten die Flüssigkeiten sowohl Doppelbrechung wie bei Glas als auch wie bei Bernstein.

Überblicken wir jetzt die Gesamtheit der in diesem Kapitel zusammengestellten Versuche, so können wir dieselben als eine Bestätigung der in unseren drei Annahmen ausgesprochenen Grundlagen der Theorie ansehen. Wenn auch noch andere Annahmen ebenfalls zu einer Darstellung aller angeführten Erscheinungen führen mögen, so z. B. die Annahme einer reinen Fernwirkung der elektrischen Kräfte, mit der Ergänzung, daß die Dielektrika Isolatoren mit eingebetteten, kleinen, leitenden Körpern sind, so erscheinen doch die der Maxwellschen Theorie zu Grunde liegenden Annahmen als die einfachsten, und als diejenigen, welche uns über die Vorstellung von dem Wesen der dielektrischen Vorgänge die geringste Beschränkung auferlegen.

Sechstes Kapitel.

Weiterentwickelung der Theorie.

---

§ 38. Dichte der Elektrizität.

Wir hatten in den vorigen Kapiteln die Elektrizitätsmenge aufgefaßt als Ausgangsstellen der Kraftlinien und hatten sie gemessen durch die Anzahl der entstehenden und verschwindenden Kraftlinien. Dadurch wurde die Divergenz der Kraft das Maß für die Elektrizitätsmenge, und wir konnten auch durch Messen der von einem kleinen elektrischen Körper ausgehenden Kräfte die Gesamtmenge der auf dem Körper vorhandenen Elektrizität in einer besonders definierten Einheit angeben. Wir erhalten so aber stets nur die Gesamtmenge in einem gewissen endlichen Raumteil, und zur weiteren mathematischen Behandlung wird es nötig, noch einen neuen Begriff einzuführen. Zum Auffinden der Elektrizitätsmengen haben wir uns das elektrische Feld ausgemessen zu denken, so daß die Niveauflächen und Einheitskraftröhren bekannt sind; dann verfolgen wir die Kraftröhren nach beiden Richtungen bis an ihre Enden und gelangen so zu den Elektrizitätsmengen, indem jedesmal 4π-Kraftröhren in einer Einheit der Elektrizität entspringen. Da nun stets der Querschnitt der Kraftröhren umgekehrt proportional der Kraft ist, und unendlich große elektrische Kräfte nicht angenommen werden können, so kann eine Kraftröhre auch stets nur mit endlichem Querschnitt endigen; das heißt: eine endliche Elektrizitätsmenge kann nicht in einem unendlich kleinen Raume zusammengedrängt sein. Im allgemeinen enden die Kraftröhren in zusammenhängenden Flächen, entweder den Grenzen des

elektrischen Feldes oder den Trennungsflächen verschiedener Dielektrika; wenn dann e die Elektrizitätsmenge ist, die auf dem kleinen, aber endlichen Flächenstück ds sich befindet, so daß von ds $4\pi e$-Kraftlinien ausgehen, dann soll der Grenzwert, dem sich $\frac{e}{ds}$ mit immer kleiner werdenden ds nähert, die Flächendichte der Elektrizität genannt und mit σ bezeichnet werden; also $\frac{e}{ds} = \sigma$, oder $e = \sigma ds$.

In ähnlicher Weise läßt sich auch die räumliche Dichte ϱ der Elektrizität definieren, wenn man annimmt, daß aus einem Volumen dv im ganzen $4\pi e$-Kraftlinien austreten und ϱ gleich dem Grenzwert von $\frac{e}{dv}$ mit abnehmendem dv setzt, jedoch ist die Flächendichte für alle elektrostatischen Untersuchungen die wichtigere Größe.

Zwischen der Flächendichte und der elektrischen Kraft läßt sich folgende wichtige Beziehung ableiten.

Durchsetzt eine Kraftröhre die Trennungsfläche zweier Dielektrika, und ist der Querschnitt in der Trennungsfläche gleich ds, so kann man beiderseits von ds zwei parallele Querschnitte legen, deren Flächeninhalt man als ebenso groß wie ds ansehen kann, wenn man sie nur hinreichend dicht an ds legt. Der Kraftfluß durch das so aus der Röhre herausgeschnittene Raumstück, oder die Divergenz der Kraft über dieses Stück, setzt sich dann zusammen aus dem Kraftfluß durch die beiden Endflächen ds, denn der Fluß durch die Mantelfläche ist gleich Null. Dieser Kraftfluß muß aber gleich dem 4πfachen der in dem Volumen enthaltenen Elektrizitätsmenge sein, also wird $4\pi\sigma ds = (F_n - F_n')\, ds$ oder $4\pi\sigma = F_n - F_n'$, wenn F_n und F_n' die Vertikalkomponenten der Kraft zu beiden Seiten der Grenzfläche sind. Im § 21 hatten wir aber bereits gefunden $F_n - F_n' = \frac{k' - k}{k'} F_n$, also wird $\sigma = \frac{k' - k}{4\pi k'} F_n$. Die Dichte der freien Elektrizität an einer Stelle der Grenzfläche zweier Dielektrika ist also proportional der Vertikalkomponente der dort herrschenden elektrischen Kraft.

Beachten wir noch, daß die zur Grenzfläche tangentialen Kraftkomponenten auf beiden Seiten die gleichen sein müssen, und nennen i und i' die Winkel zwischen F bezw. F' und der Normalen zur Grenzfläche, so ist hiernach

$$F \sin i = F' \sin i'$$

und wir hatten

$$F \cos i - F' \cos i' = 4 \pi \sigma.$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i'} = 1 - \frac{4\pi\sigma}{F \cos i} = 1 - \frac{4\pi\sigma}{F_n} = \frac{k}{k'}.$$

Das ist aber wieder das Gesetz der Ablenkung der Kraftlinien, das wir bereits im § 15 kennen lernten.

Aus diesen allgemeinen Formeln für die elektrische Flächendichte erhalten wir unmittelbar die Flächendichte auf metallischen Oberflächen, indem wir $k' = \infty$ setzen. Es wird dann einfach $\sigma = \frac{1}{4\pi} F_n$ und die Kraftlinien stehen senkrecht auf der Oberfläche. Dasselbe Resultat erhalten wir natürlich auch, indem wir von vornherein $F'_n = 0$ setzen.

§ 39. Elektrischer Druck.

Es hat sich also ergeben, daß die elektrische Kraft in der Nähe einer geladenen Metalloberfläche proportional der dort befindlichen elektrischen Dichte ist. Da dieselbe Kraft auch die auf dem Metall befindliche Elektrizitätsmenge fortzubewegen strebt, und diese Menge ebenfalls der Dichte proportional ist, so ist schon zu erwarten, daß die Kraft, die die Elektrizität auf einer Metallfläche senkrecht nach außen zu treiben strebt, proportional dem Quadrate der Dichte an jeder Stelle ist. Die genaue Größe dieser Kraft erhalten wir, wenn wir beachten, daß die Gesamtkraft F in unmittelbarer Nähe der Mitte des Flächenelementes ds sich zusammensetzt aus der Kraft F_1, die die auf ds befindliche Elektrizitätsmenge ausübt, und der Kraft F_2 von den übrigen Elektrizitätsmengen. Nun wird der Teil F_2, wenn wir von dem Punkte unmittelbar an der Außenseite von ds übergehen, durch ds hindurch zu einem Punkte dicht an der Innenseite, sich nicht ändern; dagegen wird bei diesem Übergang F_1 zu $-F_1$. Die Gesamtkraft außen ist $F = F_1 + F_2$; im

Innern wird sie aber gleich Null, also ist $F_2 - F_1 = 0$ oder $F_1 = F_2$. In der Oberfläche selbst ist $F_1 = 0$ und hier wird daher die Gesamtkraft gleich F_2 oder gleich $\frac{1}{2}F = 2\pi\sigma$. Diese Kraft wirkt auf die Elektrizitätsmenge σds. Bezeichnen wir noch mit p den auf die Flächeneinheit der Oberfläche ausgeübten Druck, so muß jetzt $p ds = 2\pi\sigma \cdot \sigma ds$ sein oder $p = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi}F^2$.

Dies ist also die Größe des Druckes, unter dem jeder Teil der leitenden Oberfläche steht; der Druck ist stets nach außen gerichtet, denn, wenn auch F in die Oberfläche hineingerichtet sein kann, so befindet sich an der betreffenden Stelle der Fläche dann auch negative Elektrizität, die also in der Richtung des negativen F, d. h. nach außen getrieben wird. Dieser Druck sucht die Oberfläche auszudehnen, und wenn sie elastisch ist, wird sie, wie bei Seifenblasen, diesem Druck nachgeben und tatsächlich sich erweitern. Kann die Oberfläche sich nicht weiter dehnen, so sucht dieser Druck die Elektrizität in das begrenzende Dielektrikum hineinzutreiben. Mit dem Quadrate der Ladungsdichte steigt dieser Druck, bis das Dielektrikum nicht mehr widerstehen kann. Ist eine gewisse Höhe des Druckes überschritten, so zerreist das Dielektrikum und die Elektrizität entlädt sich unter Büschelentladung oder Funkenbildung. Der höchste Druck, den eine isolierende Substanz, ohne zu zerreißen, vertragen kann, ist ein Maß für die dielektrische Festigkeit derselben.

§ 40. Theorie des Hohlkörpers.

Aus der Beziehung $F = 4\pi\sigma$ folgt ferner $F ds = 4\pi\sigma ds$, wo ds die Fläche des Querschnitts einer Kraftröhre ist; dann ist aber σds, nach der Bedeutung von σ, die an der Endfläche der Kraftröhre befindliche Elektrizitätsmenge. Da nun $F ds$ längs der ganzen Kraftröhre überall denselben Wert hat, so folgt, daß an den beiden Enden ein- und derselben Kraftröhre stets entgegengesetzt gleiche Elektrizitätsmengen vorhanden sein müssen. Wenn dies aber für jede einzelne Kraftröhre gilt, so gilt es auch für ein ganzes Bündel aneinander liegender Kraftröhren von beliebigem Querschnitt. Jeder cylindrische Raum im elektrischen

Felde, dessen Seitenlinien Kraftlinien sind, hat also an seinen Endflächen jederzeit entgegengesetzt gleiche elektrische Ladungsmengen.

Weiter folgt hieraus auch, daß die gesamte Elektrizitätsmenge an der Innenfläche eines metallenen Hohlraumes stets entgegengesetzt gleich der Summe der im Innern vorhandenen Elektrizitätsmengen sein muß; denn denken wir uns alle im Innern vorhandenen Elektrizitätsmengen durch eine geschlossene Fläche umgeben, die auch noch ganz im Innern des Hohlraumes liegt, so ist der Überschuß, der aus dieser Fläche austretenden Einheitskraftröhren über die eintretenden gleich 4πmal der algebraischen Summe der im Innern vorhandenen Elektrizitätsmengen. Verfolgen wir nun alle diese Einheitsröhren, sowohl die eintretenden wie die austretenden, nach außen hin und erreichen sie dann alle die Innenseite des Hohlraumes, so muß sich am Ende jeder Einheitsröhre die Elektrizitätsmenge $\frac{1}{4\pi}$ finden, positiv, wenn die Einheitsröhre in das Innere des Hohlraumes hinein gerichtet ist, sonst negativ. Der Überschuß der so gefundenen negativen Elektrizitätsmengen über die positiven, oder die Gesamtmenge an negativer Elektrizität, ist dann gleich der Gesamtmenge an positiver Elektrizität im Innern des Hohlraumes. Reichen nicht alle Kraftröhren bis an die Innenwand des Hohlraumes, so kann das nur dadurch möglich sein, daß eine, aus der angenommenen Fläche austretende Röhre, sich mit einer eintretenden vereinigt, da ja außerhalb dieser Fläche im Innern des Hohlraumes keine Elektrizitäten vorhanden sein sollten. Wenn dies nun auch beliebig oft vorkommt, so fallen dadurch auf der Innenseite des Hohlraumes stets nur gleiche und entgegengesetzte Elektrizitätsmengen fort, die Gesamtmenge bleibt daher die gleiche und es gilt ganz allgemein der Satz: An der Innenwandung eines leitenden Hohlraumes muß stets eine Gesamtladung vorhanden sein, entgegengesetzt gleich der Summe der im Innern vorhandenen Elektrizitätsmengen.

Bringen wir also, wie in den Versuchen des ersten Kapitels mehrfach angenommen, in das Innere eines metallenen Hohlkörpers beliebige geladene Körper, so folgt nach der eben entwickelten Theorie, daß auf der Innenseite des Hohlraumes durch Influenz eine entgegengesetzt gleiche Ladung

entstehen muß. Ist der Metallkörper isoliert, und gilt ganz allgemein das Gesetz, daß beim Erzeugen von Elektrizitätsmengen auf irgend welche Weise stets nur entgegengesetzt gleiche Elektrizitätsmengen entstehen, so müssen wir erwarten, daß auf der Außenseite des Metallkörpers eine Elektrizitätsmenge auftreten muß, die genau gleich der Ladung der in den Hohlraum hineingebrachten Körper ist. Die Richtigkeit dieser Folgerung läßt sich durch die Versuche auf das genaueste erweisen, wenn man folgendermaßen verfährt: Man nehme zwei isolierte metallene Hohlkörper, die unter sich ganz verschieden sein können, bringe einen oder mehrere kleine elektrisierte Metallkörper in den ersten Hohlkörper hinein, ohne ihn zu berühren, leite den Hohlkörper ab und isoliere ihn wieder; dann entferne man die elektrischen Körper, die ihre Ladung noch unverändert haben, und bringe sie in den zweiten, isolierten Hohlkörper und in Berührung mit der Innenwand. Dann verbinde man die Hohlkörper leitend, und es wird nicht die geringste Spur von Elektrisierung auf ihnen übrig bleiben. Bei dem ersten Körper war durch die Ableitung die Außenladung entfernt, nach Wiederentfernen der elektrisierten Körper hatte er also die entgegengesetzt gleiche Ladung wie diese. Im zweiten Hohlkörper hatte sich die Innenladung mit der Ladung der eingeführten Körper gerade ausgeglichen; dieser hatte also nur die Außenladung behalten. Da diese Außenladung sich mit der Ladung des ersten Hohlkörpers gerade ausgleicht, so müssen beide Ladungen genau entgegengesetzt gleich sein.

Wiederholen wir diese Versuche, indem wir noch im Innern der Hohlkörper beliebige isolierte Metallkörper anbringen, so wird immer dasselbe Ergebnis gefunden. Daraus folgt, daß bei der Influenzwirkung, die die eingeführten elektrisierten Körper auf die anderen Metallkörper ausüben, auf diesen stets nur entgegengesetzt gleiche Elektrizitätsmengen entstehen. Denken wir uns die Hohlkörper beliebig groß, so wird auf diese Weise ganz allgemein durch das Experiment das Gesetz bewiesen, daß *bei der Influenzwirkung stets entgegengesetzt gleiche Elektrizitätsmengen entstehen.* Aus der Theorie allein konnten wir mit den bisherigen Annahmen zu diesem Gesetz nicht gelangen, ohne irgend welche hypothetische Vorstellungen über das Wesen der elektrischen Erscheinungen an Metallen ein-

zuführen. Der im zweiten Kapitel durchgeführte Vergleich des elektrischen Feldes mit einem von einer inkompressiblen Flüssigkeit durchströmten Gebiet, führt ebenfalls zu diesem Gesetz, wenn wir die Metalle als Dielektrika ansehen mit unendlich großen Konstanten k. Die oben genannten Versuche bestätigen uns daher die Zulässigkeit dieses Bildes auch für den Grenzfall der Metalle und dadurch wird sich später die Möglichkeit ergeben, dieses Bild auch für die strömende Elektrizität zu erweitern.

§ 41. Spitzenwirkung.

Eine weitere Folge von der an den Enden der Kraftröhren vorhandenen elektrischen Dichte ist auch die Wirkung von an Metallkörpern angebrachten Spitzen. Eine Spitze können wir ansehen, als ein Stück der Oberfläche von sehr starker allseitiger Krümmung; da nun die Kraftlinien senkrecht zur Oberfläche stehen müssen, so müssen sie die Spitze notwendig sehr stark divergierend verlassen. Ist ds ein Element der Spitzenoberfläche, so muß der Querschnitt der auf ds stehenden Kraftröhre sehr rasch zunehmen, und ein in endlichem Abstand durch die Kraftröhre gelegter Querschnitt ds' muß im Verhältnis zu ds schon sehr groß sein. Da nun $f\,ds = f'\,ds'$ ist und f' jedenfalls endlich ist, so wird $f = f'\frac{ds'}{ds}$ jedenfalls sehr groß und die Dichte an der Spitze wird $\sigma = \frac{1}{4\pi}f$, also ebenfalls sehr groß. An den Spitzen häuft sich also die Elektrizität in sehr großer Dichte an, und da der elektrostatische Druck mit dem Quadrate der Dichte steigt, so wird an den Spitzen sehr leicht die Büschel- oder Funkenentladung eintreten; die Elektrizität hat das Streben, durch die Spitzen in das Dielektrikum auszuströmen.

§ 42. Leitende Kugel im homogenen Felde.

Um nun weiter die Erscheinungen des elektrischen Feldes genauer zu übersehen und insbesondere die Versuche des ersten Kapitels vollständig im Sinne der Theorie zu verstehen, untersuchen wir zunächst die Einwirkung eines homogenen elektrischen Feldes auf eine leitende Kugel. Unter einem

homogenen elektrischen Feld verstehen wir ein solches, in welchem alle Kraftlinien parallel und äquidistant sind, d. h., die Einheitsröhren sind von gleichem Querschnitt. Ein solches Feld wäre also zu zeichnen, als ein System äquidistanter, paralleler Kraftlinien, deren Niveauflächen ebenfalls in gleichem Abstande stehen. Bringen wir in ein solches Feld eine Metallkugel, so werden die Kraftlinien deformiert und stellen sich senkrecht zur Kugel, sodaß ein Bild wie Figur 2 entsteht. Die

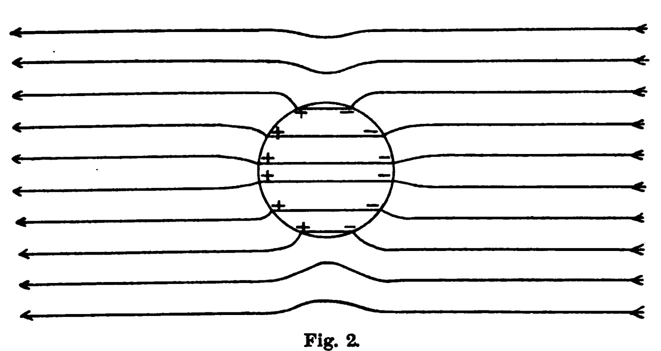


Fig. 2.

den Kraftlinien entgegengewendete Seite der Kugel wird mit negativer Elektrizität, die abgewendete Seite mit positiver belegt. Wir können uns in einfacher Weise eine Vorstellung von der Art dieser Verteilung von Elektrizität machen, wenn wir uns denken, die Kugel sei, bevor sie in das Feld gebracht wurde, homogen erfüllt gewesen mit beiden Elektrizitäten in der gleichen räumlichen Dichtigkeit ϱ. Nun wird durch das elektrische Feld die positive Elektrizität um ein kleines Stück in der Richtung des Feldes, die negative entgegengesetzt verschoben. Wir erhalten also zwei kugelförmige, homogene elektrische Massen, die um die kleine Strecke d gegeneinander verschoben sind (siehe Fig. 3). Die elektrische Dichte auf der Metallkugel entspricht dem Teil jeder Kugel, der über den anderen herausragt. Die Wirkung einer solchen Doppelkugel ist nun leicht zu berechnen. Wir hatten bereits im § 19 das Potential einer homogenen Kugel auf einen Punkt im Innern derselben abgeleitet und gefunden, wenn wir an Stelle der dort gebrauchten Divergenz δ, die gleichwertige Größe $4\pi\varrho$ setzen: $V = 2\pi\varrho R^2 - \frac{2\pi\varrho a^2}{3}$, wo R den Kugelradius und a den Ab-

stand des Kugelmittelpunktes von dem betrachteten Punkte, also in der Figur 3 die Strecke AM bedeutet. Hieraus folgt als Größe der Kraft im Punkte M $\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{4\pi\varrho}{3} \cdot AM$. In derselben Weise ist die Kraft der anderen Kugel, deren Mitte A' ist, in dem gleichen Punkt M gleich $\frac{4\pi\varrho}{3} A'M$. Während die eine Kraft von A nach M wirkt, ist die andere

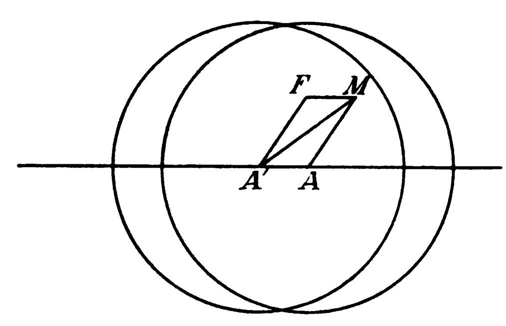


Fig. 3.

von M nach A' gerichtet, die resultierende Kraft beider Kugeln ist daher parallel der Zentrale AA' und proportional d. Die Kraft im gemeinsamen Innern beider Kugeln ist also überall gleich und gleichgerichtet, bezeichnen wir sie mit F_i, so ist $F_i = \frac{4\pi\varrho}{3} d$. Ist x die Projektion des Abstandes MA auf die Zentrale, so wird das Potential im Innern $V_i = \frac{4\pi\varrho d}{3} \cdot x$. Für die Größe ϱd können wir nun, wenn wir die Doppelkugel ansehen als Bild der Ladungsverteilung auf der Metallkugel, die Flächendichte σ_0 der Ladung in der Zentrale einführen, denn diese ist offenbar nach der angenommenen Vorstellung gerade gleich ϱd; dann wird:

$$F_i = \frac{4\pi}{3}\sigma_0 \text{ und } V_i = \frac{4\pi}{3}\sigma_0 x.$$

Die Dichte σ von einer beliebigen Stelle der Kugel, die auf einem mit der Zentrale den Winkel ω bildenden Radius liegt, ist $\sigma = \sigma_0 \cos\omega$, da sie gleich der Dicke der Schicht in der Richtung des Radius zu setzen ist.

Die Gesamtmenge an positiver oder negativer Elektrizität, auf jeder Hälfte der Metallkugel, ist gleich dem Volumen der überstehenden Schicht bei der Doppelkugel. Da nun diese Schicht in der Richtung der Zentrale überall die gleiche Höhe d hat, so ist dies Volumen gleich dieser Höhe, mal der gemeinsamen Basis πR^2. Es wird daher die gesuchte Elektrizitätsmenge $M = \pi R^2 \varrho d = \pi R^2 \sigma_0$.

Wenden wir jetzt diese Ergebnisse an auf den Fall, daß die Metallkugel sich in dem homogenen Felde von der konstanten Kraft F befindet, so wissen wir, daß die elektrische Belegung derart sein muß, daß im Innern der Kugel die Gesamtkraft überall gleich Null ist, also folgt

$$F = -F_i = -\frac{4\pi}{3}\sigma_0 \text{ oder } \sigma_0 = \pm\frac{3}{4\pi}F,$$

wobei das untere Zeichen für die dem Felde entgegengewendete Seite gilt. Die Gesamtmasse an positiver Elektrizität wird dann:

$$M = \frac{3}{4}R^2 F.$$

Das durch die Schicht allein hervorgerufene Potential im Innern ist $V_i = \frac{4\pi}{3}\sigma_0 x = F x$. Ist dann V_0 das Potential des Feldes allein an der Stelle des Kugelmittelpunktes und V_x an einer um x hiervon entfernten Stelle, so muß, da das Feld homogen ist $\frac{V_0 - V_x}{x} = F$ sein; es wird also $V_0 - V_x = V_i$ oder $V_x + V_i = V_0$. Werden also das durch die Schicht hervorgerufene Potential und das des Feldes übereinander gelagert, so zeigt sich, daß alle Teile der Kugel das gleiche Potential erhalten und zwar das Potential V_0 des Feldes an der Stelle des Kugelmittelpunktes. Durch die angenommene Verteilung der elektrischen Dichte wird also tatsächlich auf und in der Kugel ganz die Verteilung der Kraft und des Potentials hervorgerufen, die die Theorie verlangt. Nun wissen wir aber aus der Schlußweise des zweiten Kapitels (§ 10) bereits, daß, wenn in einem ganzen geschlossenen Raume an allen Stellen das Potential, in diesem Falle V_i gegeben ist, dann die Quellpunkte, also die Verteilung der Dichtigkeit an der Grenze dieses Raumes, eindeutig bestimmt sind; also muß auch die angenommene

Verteilung der elektrischen Dichte die einzig mögliche sein, die der Theorie genügt und muß der Wirklichkeit entsprechen. Aus ihr müssen sich daher auch die richtigen Werte des Potentials und der Kraft außerhalb der Kugel berechnen.

Wir haben daher nur noch die Werte des Potentiales V_a und der Kraft F_a, die die Schicht allein, außerhalb der Kugel hervorruft, zu berechnen und über das Potential V und die Kraft F des Feldes überzulagern, um die Aufgabe vollständig gelöst zu haben.

Das Potential V_a berechnet sich aber als die Summe der Potentiale der beiden Vollkugeln. Das Potential einer Vollkugel ist gleich der Masse der Kugeln, dividiert durch den Abstand des Kugelmittelpunktes von dem Punkt, für den das Potential gesucht wird. Nennen wir diesen Abstand a und den Winkel zwischen ihm und der Zentralen ω, so wird:

$$V_a = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho \cdot \frac{1}{a} - \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho \frac{1}{a + d\cos\omega},$$

wo d wieder der Abstand der beiden Kugelzentren ist, also:

$$V_a = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho \frac{d\cos\omega}{a(a + d\cos\omega)},$$

vernachlässigen wir im Nenner noch das kleine $d\cos\omega$ gegen a, so wird

$$V_a = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0 \cdot \frac{\cos\omega}{a^2},$$

oder auch

$$V_a = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0 \cdot \frac{x}{a^3},$$

wo x wieder die Projektion von a auf die Zentrale ist. Dieses Potential ist also überall dem Potential V des Feldes hinzuzufügen, um das resultierende Potential zu erhalten, und durch Differentiation des Gesamtpotentials erhält man für jede Stelle die resultierende Kraft.

§ 43. Theorie der Probekugeln.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen behalten ihre Gültigkeit auch für den Fall, daß die Kugel bereits von vornherein eine bestimmte Ladung hatte, es lagert sich dann einfach die Wirkung dieser gleichförmig verteilten

Ladung über das Ganze über, die Ladungen und Potentiale addieren sich. Dies setzt uns aber auch in den Stand, zu berechnen, welche Verteilung eintritt, wenn wir die Kugel, nachdem sie in das Feld gebracht ist, durch leitende Verbindung mit irgend einem anderen Körper auf ein anderes Potential bringen. Wir nehmen den allgemeinen Fall, daß an zwei Stellen eines beliebigen elektrischen Feldes Metallkugeln mit den Radien R_1 und R_2 gebracht werden; sind dann die Dimensionen dieser Kugeln derart, daß das Feld im Bereich der unmittelbaren Umgebung jeder Kugel als gleichförmig gelten kann und ist der Abstand der Kugeln so groß, daß der direkte gegenseitige Einfluß vernachlässigt werden kann, so nehmen beide die Potentiale V_1 und V_2 des Feldes in den Zentren der Kugeln an. Werden jetzt beide Kugeln durch einen sehr feinen Draht verbunden, der selbst keine merkliche Ladung aufnehmen kann, so werden sie dadurch auf gleiches Potential gebracht. Eine gewisse Elektrizitätsmenge M geht von 1 auf 2 über, die gleiche, aber entgegengesetzte von 2 auf 1, das resultierende Potential sei V'. Es muß dann auf der ersten Kugel das hinzukommende Potential gleich $\frac{M}{R_1}$ sein, also wird

$$V' = V_1 + \frac{M}{R_1} \quad \text{und ebenso} \quad V' = V_2 - \frac{M}{R_2},$$

also

$$V_2 - V_1 = M\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$M = (V_2 - V_1)\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{und folglich}$$

$$V' = V_1 + (V_2 - V_1)\frac{R_2}{R_1 + R_2} = V_2 - (V_2 - V_1)\frac{R_1}{R_1 + R_2},$$

oder

$$V' = \frac{V_1 R_1 + V_2 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Da bei kugelförmigen Leitern die Kapazität, wie wir im § 30 sahen, einfach proportional dem Radius ist, so können wir in dieser Formel noch die Radien durch die Kapazitäten C_1 und C_2 ersetzen und erhalten

$$V' = \frac{V_1 C_1 + V_2 C_2}{C_1 + C_2}.$$

In dieser Gestalt ergibt uns diese Formel ganz allgemein das Potential, das erhalten wird, wenn wir zwei leitende Körper beliebiger Gestalt, die vorher die Potentiale V_1 und V_2 hatten, in leitende Verbindung setzen, denn wir hätten von Anfang an bei dieser Ableitung die Radien durch die Kapazitäten ersetzen können.

Ist insbesondere der eine Körper eine kleine, in ein elektrisches Feld gebrachte Kugel, der andere Körper die Erde, so ist $C_2 = \infty$, $V_2 = 0$ zu setzen, und es wird naturgemäß $V = 0$. In diesem Falle ist die auf der kleinen Kugel sich ansammelnde Menge freier Elektrizität $M = -V_1 R_1$; das heißt, die Ladung der Kugel ist proportional und entgegengesetzt dem Potential des Feldes an der Stelle, an welche die Kugel gebracht wird.

Ist der zweite Körper nicht die Erde, sondern ein Elektroskop, das zu Beginn unelektrisch ist, und ganz außerhalb des Bereiches des elektrischen Feldes sich befindet, so ist $V_2 = 0$, und beim Hineinbringen der mit dem Elektroskop durch einen feinen Draht leitend verbundenen Kugel in das Feld zeigt das Elektroskop das Potential:

$$V' = \frac{V_1 R_1}{R_1 + C_2}.$$

Dies Potential weicht also um so mehr von dem Potential des Feldes an der Stelle der Kugel ab, je größer die Kapazität des Elektroskops gegenüber derjenigen der Kugel ist.

Nicht zu verwechseln mit der Gesamtladung M, die jede Kugel besitzt, ist die Dichtigkeit der Elektrizität auf der Kugel. Die Dichtigkeit hat an dem größten Teile der Oberfläche stets mit M gleiches Vorzeichen, es kann aber auch auf einer Seite der Kugel eine Zone geben, wo die Dichte das entgegengesetzte Zeichen hat. Der Grenzfall, wo in einem Pol der Kugel gerade die Dichtigkeit Null herrscht, tritt dann ein, wenn die durch die Ladung M hervorgerufene gleichförmige Dichtigkeit gerade gleich der Poldichte der durch das Feld hervorgerufenen Schicht ist; wenn also für die erste Kugel

$$\sigma_0 = \frac{3}{4\pi} F = \frac{M}{4\pi R^2},$$

oder $$M = 3 R_1^2 F = \frac{3}{2} (V_1' - V_1'') R_1,$$

wenn wir unter V_1' und V_1'' die Potentiale des Feldes an den beiden Polen dieser Kugel verstehen.

Betrachten wir den Fall, daß $V_2 = 0$ ist, also das Beispiel des Elektroskops, so können wir noch setzen

$$V_1 = \frac{V_1' + V_1''}{2}; \quad M = \frac{V_1 R_1 C_2}{R_1 + C_2}$$

und erhalten dann

$$(V_1' + V_1'') \frac{C_2}{R_1 + C_2} = 3 (V_1' - V_1''),$$

woraus sich ergibt $$\frac{V_1'}{V_1''} = \frac{3 R_1 + 4 C_2}{3 R_1 + 2 C_2}.$$

Für den Fall, daß an Stelle des Elektroskops die Erde tritt, daß also die Kugel auf das Potential Null gebracht wird, ist $C_2 = \infty$ zu setzen und es wird die einfache Beziehung erhalten, daß $V_1' = 2 V_1''$ sein muß. Ist V_1'' kleiner als die Hälfte von V_1', oder im allgemeinen Fall kleiner als $\frac{3 R_1 + 2 C_2}{3 R_1 + 4 C_2} V_1'$, so ist der abgewendete Pol umgeben von einer kleinen Zone, in welcher die Dichte mit dem Feldpotential gleiches Vorzeichen hat; ist V_1'' größer, so ist auf allen Seiten die Dichte vom entgegengesetzten Zeichen wie das Feldpotential.

§ 44. Die Versuche des ersten Kapitels.

An der Hand dieser Ergebnisse läßt sich jetzt die Bedeutung der Versuche des ersten Kapitels und verwandter Versuche vollständig übersehen.

Wir verstehen unter einem Elektroskop einen isolierten Metallkörper, an welchem an einer Stelle ein leicht beweglicher Körper befestigt ist, dessen Bewegung uns die Ladung des Metallkörpers erkennen läßt. Dieser Metallkörper soll vollständig der direkten Einwirkung irgend eines elektrischen Feldes, außer dem durch seine eigene Ladung hervorgerufenen, entzogenen sein; auch sollen am Elektroskop und in seiner Umgebung während aller Versuche keine anderen Veränderungen vorkommen, als die dem Elektroskop mitgeteilten

Ladungen hervorrufen; dann werden die Ausschläge des leicht beweglichen Körpers (Aluminiumblättchen) diesen Ladungen entsprechen und damit zugleich den Potentialen des Elektroskopes, denn unter den bezeichneten Voraussetzungen ist die Kapazität des Elektroskops konstant, also müssen die Potentiale den Ladungen proportional sein. Ist ein solches Elektroskop einmal auf irgend eine Weise geaicht worden, d. h. ist die Beziehung zwischen der Größe der Ausschläge und den zugehörigen Potentialen ermittelt, so lassen sich mit demselben folgende Versuche zur Untersuchung eines elektrischen Feldes anstellen:

1. Eine isolierte Probekugel wird in das Feld an eine bestimmte Stelle gebracht, dort ableitend berührt und wieder isoliert, dann wird die so erhaltene Ladung der Kugel vollständig auf das Elektroskop übertragen und dadurch gemessen (§ 5). Wir erhalten auf diese Weise für die verschiedenen Stellen des elektrischen Feldes Ausschläge am Elektroskop, die den Potentialen des Feldes an diesen Stellen entsprechen, denn nach dem vorigen Paragraphen sind die so erhaltenen Ladungen diesen Potentialen proportional.

2. Die isolierte Probekugel wird durch einen feinen Draht mit dem Elektroskop dauernd verbunden und an die verschiedenen Stellen des Feldes gebracht. Das Elektroskop zeigt dann stets das Potential $V' = \frac{V_1 R_1}{R_1 + C_2}$, wo die Bezeichnungen die gleiche Bedeutung wie im vorigen Paragraphen haben, der Ausschlag am Elektroskop zeigt also stets ein kleineres Potential an als das Feldpotential, doch ist er diesem proportional. Die Folge davon ist, daß wir ein stetiges Steigen des Potentiales beobachten, wenn wir uns mit dem Probekörper dem das Feld erzeugenden elektrischen Körper nähern; sowie wir aber diesen selbst berühren, wird ein plötzlicher Potentialsprung am Elektroskop beobachtet, der nicht der wirklichen Potentialverteilung entspricht, sondern daher rührt, daß bei dieser Berührung an Stelle des kleineren R_1 in der Formel, die meist viel größere Kapazität C_1 des das Feld erzeugenden Körpers tritt.

3. Die beiden oben genannten Versuchsweisen geben uns zunächst nur den Potentialen proportionale Werte und

lassen das wahre Feldpotential nur nach den Formeln des vorigen Paragraphen berechnen, wenn man die Größen R_1 und C_2 hinreichend kennt, was im allgemeinen nicht der Fall sein wird. Folgende Methode ermittelt den Potentialwert selbst ohne derartige Berechnung. Man führt vom Elektroskop einen feinen Draht bis an die zu messende Stelle des Feldes, und bringt ferner eine isolierte Probekugel in das Feld bis zur Berührung mit dem Drahtende; dann nimmt das Elektroskop zunächst noch ein zu niedriges Potential an. Jetzt entfernt man die Probekugel ganz aus dem Felde, entlädt sie und führt sie abermals bis zur Berührung mit dem Drahtende, dann wird der Ausschlag am Elektroskop zunehmen. Dies wiederholt man so oft, bis kein weiteres Steigen des Ausschlages mehr eintritt; dann zeigt das Elektroskop das Potential an der betreffenden Stelle des Feldes.

Dasselbe erreicht man, wenn man nicht dieselbe Probekugel mehrfach hin- und herführt, sondern von dem Drahtende kleine Körper sich ablösen und ganz aus dem Felde herausfallen läßt. Man bildet dazu das Drahtende zu einer feinen Röhre aus, aus der man kleine Wasser- oder Quecksilbertropfen austreten läßt. Das Elektroskop nimmt dann das Potential der Stelle an, an der sich die Tropfen ablösen.

Dasselbe wird erreicht, wenn an Stelle der Tropfen eine kleine Flamme gesetzt wird; auch die Flammengase vertreten die Stelle sich ablösender kleiner Teilchen, doch ist die Stelle, deren Potential auf diese Weise angezeigt wird, weniger scharf bestimmt und liegt in der Regel einige Centimeter über der äußersten sichtbaren Flammenspitze. Diese Methode wird meist verwendet zur Ausmessung des Potentiales an den verschiedenen Stellen der freien Atmosphäre. An Stelle der Flamme kann auch eine stark radioaktive Substanz treten.

4. Das Potential eines geladenen leitenden Körpers wird angenähert gemessen, wenn man denselben mit dem Elektroskop durch einen Draht verbindet und die Kapazität des Elektroskops klein gegen die des geladenen Körpers ist; der genaue Wert kann berechnet werden, wenn man die Kapazitäten beider Teile kennt. Man erhält den gesuchten Potentialwert auch ohne Kenntnis der Kapazitäten,

wenn man das Elektroskop vor Anlegen der Drahtverbindung auf nahezu das gleiche Potential bringt. Es ist bei diesen Versuchen naturgemäß gleichgültig, an welche Stelle des zu prüfenden Körpers der leitende Draht angelegt wird.

Wenn der geladene Körper hohl ist und der Innenraum genügend zugänglich ist, so kann man sein Potential auch bestimmen, ohne ihn zu berühren, indem man das Potential des Innenraumes nach einer der erstgenannten Methoden mißt.

5. Die elektrische Dichte an den verschiedenen Stellen eines leitenden Körpers wird gemessen, indem man einen kleinen, isolierten Probekörper (Scheibchen, das sich glatt an die Oberfläche anlegen läßt, oder Kugel, deren Radius klein ist gegen die Krümmung der Oberfläche an der betreffenden Stelle), mit diesen Stellen in Berührung bringt und seine Ladung am Elektroskop prüft.

6. Die elektrische Kraft an einer Stelle im Felde ist gleich der Potentialdifferenz zweier benachbarter Punkte, dividiert durch den Abstand der beiden Punkte. Hat man daher zwei Probekörper in festem, kleinen Abstand voneinander und bringt sie an eine Stelle des Feldes, verbindet sie dort leitend miteinander, löst die Verbindung wieder und prüft dann die Ladung einer der Kugeln, so ist diese Ladung nach dem vorigen Paragraphen proportional der Potentialdifferenz der Stellen des Feldes, an denen die Probekörper sich befanden. Da der Abstand der Körper ein fester sein sollte, so erhält man auf diese Weise am Elektroskop Ausschläge, welche der Komponente der elektrischen Kraft in der Richtung der Verbindungslinie der Probekörper an der betreffenden Stelle des Feldes proportional sind. Sind die Körper kleine Scheiben, die aneinander gelegt werden, so haben wir die letzte Gruppe der Versuche des § 5.

§ 45. Isolierende Kugel im Felde.

Wird in das elektrische Feld an Stelle der Metallkugel eine dielektrische Kugel gebracht, so können ebenfalls die im § 42 abgeleiteten Beziehungen an der Doppelkugel benutzt werden, um die Dichtigkeit freier Elektrizität an der

Oberfläche der isolierenden Kugel zu berechnen. Nach § 20 ist an der Trennungsfläche zweier Dielektrika

$$k F_n - k' F_n' = 0 \text{ oder } \frac{F_n}{F_n'} = \frac{k'}{k}.$$

Es war nun das Potential der Doppelkugel in einem äußeren Punkt

$$V_a = \frac{4}{3} \pi R \sigma_0 \frac{\cos \omega}{a^2},$$

wo a der Radiusvektor vom Kugelmittelpunkt nach dem betreffenden Punkte hin ist, und ω der Winkel zwischen a und der Zentrale der Doppelkugel. Daraus ergibt sich als Kraft in der Richtung von a

$$\frac{\partial V_a}{\partial a} = F_a = -\frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0 \frac{2 \cos \omega}{a^3};$$

in einem Punkte der Oberfläche wird also

$$F_a = -\frac{4}{3} \pi \sigma_0 \cdot 2 \cos \omega = F_i \, 2 \cos \omega,$$

wenn F_i wieder die konstante Kraft im Innern ist. Die Kräfte F_n und F_n' setzen sich nur aus den Kräften der Doppelkugel und des Feldes F zusammen, und es wird

$$F_n = (F - 2 F_i) \cos \omega \text{ und } F_n' = (F + F_i) \cos \omega,$$

also erhalten wir

$$\frac{F_n}{F_n'} = \frac{F - 2 F_i}{F + F_i} = \text{konst.}$$

Die durch die Doppelkugel charakterisierte elektrische Schicht genügt also der von der Theorie geforderten Verteilung der elektrischen Dichte.

Setzen wir noch $\frac{k'}{k}$ oder die Dielektrizitätskonstante der Kugel, bezogen auf die der Umgebung (Luft) gleich μ, so wird

$$\frac{F - 2 F_i}{F + F_i} = \mu \text{ oder } F_i = -\frac{\mu - 1}{\mu + 2} F,$$

und die Poldichte auf der Kugel wird

$$\sigma_0 = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} F,$$

woraus sich die Dichte an einer beliebigen Stelle nach $\sigma = \sigma_0 \cos \omega$ berechnet.

Der Verlauf der Kraftlinien bei der dielektrischen Kugel unterscheidet sich von demjenigen bei der Metallkugel im wesentlichen dadurch, daß bei ihr die Kraftlinien nicht mehr senkrecht zur Kugeloberfläche stehen. Ist ϑ der Einfallswinkel, so muß

$$\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\omega} = \frac{k}{k'} = \frac{1}{\mu}$$

sein. Für $\mu = \infty$ gehen alle Formeln für die dielektrische Kugel in diejenige für die Metallkugel über.

Da hiernach aus der Doppelkugel die elektrische Dichte in richtiger Weise zu berechnen ist, so kann auch die Gesamtkraft, mit der das Feld die Kugel fortzubewegen strebt, hierdurch gefunden werden. Denken wir uns das elektrische Feld erzeugt durch eine gleichmäßig geladene Kugel, so kann für die Wirkung in größerer Entfernung die gesamte Masse im Zentrum vereinigt gedacht werden. Ist diese Masse m und ist die dielektrische Kugel im Abstande a von m und selbst so klein, daß in ihrer nächsten Umgebung das Feld noch als homogen gelten kann, so denke man sich dieselbe wieder durch die Doppelkugel ersetzt, deren Zentren den Abstand d haben. Ist wieder ϱ die räumliche Dichte in jeder dieser Kugeln und r ihr Radius so ist

$$\frac{4\pi}{3} r^3 \varrho = m'$$

ihre Masse. Auf die Doppelkugel wirkt dann die Kraft

$$\frac{mm'}{a^2} - \frac{mm'}{(a+d)^2} = \frac{2mm'}{a^3} d,$$

da wir jetzt wieder $\varrho d = \sigma_0$ setzen können und für σ_0 gefunden wurde

$$\sigma_0 = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} F,$$

so wird die Kraft auf die Kugel

$$\varphi = \frac{2m}{a^3} \frac{4\pi r^3}{3} \sigma_0 = \frac{2m}{a^3} \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{3}{4\pi} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \cdot F.$$

Ersetzt man jetzt noch F durch seinen Wert $\frac{m}{a^2}$ so wird:

$$\varphi = \frac{2m^2}{a^5} r^3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

Damit ist auch die theoretische Grundlage für die im § 36 genannten Versuche von Boltzmann zur Bestimmung von Dielektrizitätskonstanten aus der auf eine dielektrische Kugel wirkenden Kraft gegeben.

Siebentes Kapitel.

Energie eines Systems von Leitern.

§ 46. Ruhende Leiter mit wechselnden Ladungen.

Wir haben im § 28 allgemein für die Energie eines elektrischen Systems die Formen abgeleitet:

$$T = \frac{k}{2}\int V_1 e_2 \, dv = \frac{1}{2}\int D F dv = \frac{k}{8\pi}\int F^2 \, dv$$
$$= \frac{2\pi}{k}\int D^2 \, dv = \frac{1}{2}\int V \varepsilon \, dv.$$

Haben wir es nur mit einer Anzahl leitender Körper in einem homogenen Dielektrikum zu tun, so kommt nur die erste dieser Formen in Betracht. Sind $E_1, E_2, E_3 \ldots.$ die Gesamtladungen der einzelnen Leiter und $V_1, V_2, V_3 \ldots.$ die entsprechenden Potentiale, so können wir nach dieser ersten Form schreiben, die Energie des Systems ist:

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma V E, \tag{1}$$

wo über alle einzelnen Leiter zu summieren ist; denn in dem Integral $\int V_1 e_2 \, dv$ bedeutet V_1 das Potential, das alle einzelnen Elektrizitätsmengen an der Stelle von dv hervorrufen. Dies Potential ist aber an der ganzen Oberfläche eines einzelnen Leiters konstant, kann also für die Integration über diesen Leiter vor das Integralzeichen gesetzt werden. Die Größe $\int e_2 \, dv$ bedeutet dann aber die gesamte auf diesem Leiter vorhandene Elektrizitätsmenge. Auf die Weise wird jener Integralausdruck für diesen Fall zu einer Summe einer endlichen Zahl von Gliedern.

Verfolgen wir zunächst, wie dieser Energieinhalt des Systems allmählich anwächst, wenn alle Leiter ohne Ladung sind und dann eine gleichmäßig anwachsende Ladung erhalten, so daß sie alle zugleich ihre Endladungen E_1 E_2 u.s.w. erreichen. Ist n ein echter Bruch, so werden in einem Moment während dieses Anwachsens der Ladungen, alle Leiter die Ladungen haben bezw. nE_1, nE_2, nE_3 .... und die entsprechenden Potentiale werden sein $nV_1, nV_2, nV_3 \ldots$; die Energie des Systems in diesem Augenblick ist daher

$$T = \frac{n^2}{2} \sum VE.$$

Einen Augenblick später ist n zu $n + dn$ gewachsen; die Energie ist also

$$T = \frac{(n + dn)^2}{2} \sum VE.$$

Der Zuwachs an Energie ist also

$$dT = \tfrac{1}{2} \Sigma VE\left((n + dn)^2 - n^2\right)$$

oder bei Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung

$$dT = \Sigma VEndn.$$

Die Integration dieses Ausdruckes von $n = 0$ bis $n = 1$ gibt naturgemäß den Energiegehalt im Endzustande $\frac{1}{2}\Sigma VE$; was wir aber aus diesem Ausdruck ersehen können, ist, daß der Energiezuwachs in jedem Augenblick zu berechnen ist, indem die jedem einzelnen Leiter zugeführte Elektrizitätsmenge Edn multipliziert wird mit dem Potential nV, auf welches sie gebracht wird, und die so für jeden Leiter gefundenen Werte $nV \cdot Edn$ summiert werden.

Wenden wir dieses jetzt an, wenn die einzelnen Ladungen weiter von den Werten E_1, E_2, E_3 ... vergrößert werden bis zu den Werten E_1', E_2', E_3' ... und dabei die entsprechenden Potentiale auf V_1', V_2', V_3' .... steigen. In einem Zwischenstadium werden wieder die Ladungen überall gleich $E + n(E' - E)$ und die Potentiale gleich $V + n(V' - V)$ sein. Der jetzt eintretende Energiezuwachs ist dann zu berechnen durch $dT = \Sigma\left(V + n(V' - V)\right)(E' - E)\,dn$. Die Integration dieses Ausdrucks von $n = 0$ bis $n = 1$ ergibt als Zunahme der Energie vom Anfangs- bis zum Endwert die Größe

$$T' - T = \tfrac{1}{2}\Sigma(E' - E)(V' + V). \tag{2}$$

Nun ist aber auch

$$T' = \tfrac{1}{2}\Sigma E' V',$$
$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma E V.$$

Aus der Differenz dieser Werte, verglichen mit dem vorhergehenden, folgt aber

$$\Sigma E V' = \Sigma E' V. \tag{3}$$

Befindet sich ein System von Leitern nacheinander in zwei verschiedenen Ladungszuständen, so ist stets die Summe der Produkte aus den Ladungen im ersten Zustand, multipliziert mit den zugehörigen Potentialen im zweiten Zustand gleich der Summe der Produkte der Ladungen im zweiten Zustand, multipliziert mit den Potentialen im ersten Zustand.

Durch Addition der Gleichungen (2) und (3) und Zusammenfassen, erhalten wir für den Energiezuwachs auch noch die Form

$$T' - T = \tfrac{1}{2}\Sigma(E' + E)(V' - V). \tag{4}$$

Die Formeln (2) und (4) lassen sich in Worten aussprechen: Der Energiezuwachs ist gleich der halben Summe der Produkte, entweder aus dem Zuwachs der Ladungen, multipliziert mit dem Mittelwert der Potentiale, oder aus dem Zuwachs der Potentiale, multipliziert mit dem Mittelwert der Ladungen.

Von der Formel (3) können leicht mannigfache Anwendungen gemacht werden, wenn man spezielle Annahmen über die Leiter macht. Ist z. B. ein Leiter A_t im Anfangs- und Endzustand ohne Ladung so ist

$$E_t V_t' = 0 \text{ und } E_t' V_t = 0.$$

Diese Glieder fallen daher aus den Summengrößen fort.

Ebenso, wenn ein Leiter A_u im Anfangs- und Endzustand mit der Erde verbunden ist, fallen die ihm entsprechenden Glieder $E_u V_u' = 0$ und $E_u' V_u = 0$ aus den Summen fort.

Sind daher alle Leiter, mit Ausnahme der beiden A_r und A_s, entweder ohne Ladung und isoliert, oder mit der Erde verbunden, so wird Gleichung (3) zu

$$E_r V_r' + E_s V_s' = E_r' V_r + E_s' V_s.$$

Hat dann in einem Zustand nur A_r eine Ladung, im anderen nur A_s, so wird

$$(5) \qquad E_r V_r' = E_s' V_s \text{ oder } \frac{E_r}{V_s} = \frac{E_s'}{V_r'}.$$

Wenn daher die Ladungen gleich sind, müssen auch die Potentiale die gleichen sein.

Oder ist anfangs nur A_r isoliert, alle anderen Leiter abgeleitet, und am Ende nur A_s isoliert, so wird

$$(6) \qquad E_s V_s' = E_r' V_r,$$

sind dann noch die beiden Potentiale V_s' und V_r einander gleich, so muß auch $E_s = E_r'$ sein. In Worten lassen sich die Formeln (5) und (6) als folgende Sätze aussprechen:

Wird in einem Systeme fester isolierter Leiter einem Leiter A_s eine Ladung E_s erteilt, so ruft diese Ladung auf irgend einem anderen Leiter A_r ein Potential V_r hervor, welches gleich ist dem Potential V_s', das auf A_s entstanden wäre, wenn die gleiche Ladung E_s auf A_r (anstatt auf A_s) gebracht wäre;

und

werden alle Leiter abgeleitet und nur einer, A_r, auf das Potential V_r gebracht, so entsteht durch Influenz auf irgend einem der anderen Leiter A_s eine Ladung, die gleich ist der Ladung, die auf A_r entstanden wäre, wenn nur A_s auf das gleiche Potential $V_s' = V_r$ gebracht wäre.

§ 47. Bewegung der Leiter bei konstanten Ladungen.

Im vorigen Paragraphen haben wir die Leiter als unbeweglich vorausgesetzt, so daß die Energieänderungen nur durch Änderung der Ladungen bezw. Potentiale möglich waren. Sind jetzt jedoch die Leiter beweglich, so wird bei jeder Veränderung ihrer Lage, durch die elektrischen Kräfte, positive oder negative Arbeit geleistet werden und dadurch der Energieinhalt geändert werden müssen. Ist dW die Größe dieser Arbeit, so muß stets nach dem Gesetz der Erhaltung der Energie $dW = -dT$ sein. Nun ist aber

$$dT = \tfrac{1}{2}\Sigma dVE = \tfrac{1}{2}\Sigma VdE + \tfrac{1}{2}\Sigma EdV.$$

Sind dann zunächst alle Leiter isoliert, so daß ihre Ladungen sich nicht ändern können, so ist $dE = 0$, also wird

$$dW = -dT = -\tfrac{1}{2}\Sigma E dV.$$

Sind die Leiter also sich selbst überlassen, so daß sie dem Antrieb der elektrischen Kräfte folgen können, so ist die von den Kräften geleistete Arbeit jedenfalls positiv, die elektrische Energie des Systems nimmt also in diesem Falle stets ab, indem die Potentiale geringer werden, und strebt bei frei beweglichen Leitern einem Minimum zu. Wird also irgend ein leitender Körper durch die elektrischen Kräfte in das Feld hineingezogen, so erniedrigt er stets die Potentiale der anwesenden Leiter.

§ 48. Bewegung der Leiter bei konstanten Potentialen.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn die Leiter bei ihrer Bewegung künstlich auf konstanten Potentialen gehalten werden. Wir können diesen Fall auf den vorigen zurückführen, wenn wir uns jeden, der mit den Ladungen $E_1, E_2, E_3 \ldots$ versehenen Leiter mit der Innenbelegung eines Kondensators von der Kapazität bezw. $C_1, C_2, C_3 \ldots$ verbunden denken, dessen Außenbelegung abgeleitet ist, wobei diese Kondensatoren außerhalb des elektrischen Feldes und jeder direkten Einwirkung entzogen sein sollen. Wir haben dann als gesamte elektrische Energie $T = \frac{1}{2}\Sigma VE + \frac{1}{2}\Sigma CV^2$ (§ 30) und es wird jetzt $dT = \frac{1}{2}\Sigma V dE + \frac{1}{2}\Sigma E dV + \Sigma CV dV$.

Es ist jetzt aber die Gesamtladung eines Leiters mit dem zugehörigen Kondensator konstant, also

$$E + CV = \text{konst.}$$

und daher
$$dE + C dV = 0,$$

oder
$$V dE + CV dV = 0.$$

Trennen wir jetzt die gesamte Energieänderung dT in die beiden Teile dT_a, der den Leitern zukommt, und dT_c, der der Energieänderung der Kondensatoren entspricht, so daß $dT = dT_a + dT_c$ ist, so folgt aus dem letzten

$$dT_a = \tfrac{1}{2}\Sigma V dE + \tfrac{1}{2}\Sigma E dV = \tfrac{1}{2}\Sigma E dV - \tfrac{1}{2} dT_c,$$

oder
$$2 dT_a + dT_c = \tfrac{1}{2}\Sigma E dV.$$

Denken wir uns jetzt die Kondensatoren beliebig groß, oder doch wenigstens so groß, daß eine merkliche Änderung der Potentiale nicht mehr eintritt, so ist $dV = 0$ zu setzen, und es wird

$$2dT_a + dT_c = 0,$$

oder

$$-dT = -(dT_a + dT_c) = dT_a.$$

Es muß aber auch in diesem Falle die von den elektrischen Kräften geleistete Arbeit gleich dem Gesamtverlust des Systems an elektrischer Energie sein, also

$$dW = -dT = dT_a.$$

Wir sehen also, daß, wenn die Leiter bei ihrer Bewegung auf konstantem Potential gehalten werden und unter dem Einflusse der elektrischen Kräfte sich bewegen, dann das System der Leiter noch einen Zuwachs an elektrischer Energie erhält, der gleich ist der Arbeit der elektrischen Kräfte; und daß dafür die Quellen, aus denen die Potentiale gespeist werden, Energie hergeben müssen, die gleich dem doppelten der Arbeit der elektrischen Kräfte ist.

Die Energie des Systems der sich selbst überlassenen Leiter strebt unter diesen Verhältnissen einem Maximum zu.

§ 49. Kapazität von Leydener Batterien.

Wir hatten im § 29 ein System von zwei Leitern, von denen der eine den andern vollständig umschließt, einen Kondensator genannt; die Oberfläche des Innenleiters ist die Innenbelegung, die Innenseite des äußeren ist die Außenbelegung. Da bei einem Kondensator auf beiden Belegungen stets entgegengesetzt gleiche Elektrizitätsmengen sein müssen, vereinfacht sich die Formel für die Energie zu der Form $T = \frac{V_i - V_a}{2} E$, wo V_i und V_a die Potentiale der Innen- bezw. Außenbelegung sind. Unter Kapazität C eines Kondensators ist das Verhältnis von E zu $V_i - V_a$ verstanden, und infolgedessen wird auch

$$T = \frac{V_i - V_a}{2} E = \frac{E^2}{2C} = \frac{C}{2}(V_i - V_a)^2.$$

Da Kondensatoren oftmals verwendet werden, um elektrische Energie aufzuspeichern, so ist die Kapazität der verschiedenen Kondensatorformen eine Größe, deren Kenntnis in vielen Fällen von Bedeutung ist. In einer Reihe einfacher Fälle läßt sich die Kapazität aus den geometrischen Abmessungen berechnen, in anderen Fällen läßt sie sich experimentell bestimmen, wenn man entweder die Potentialdifferenz oder die Elektrizitätsmenge kennt, und die bei der Entladung des Kondensators frei werdende Energiemenge als Wärme mißt.

Ein System mehrerer Kondensatoren nennt man eine Batterie; die gebräuchlichste Form des Kondensators, aus welcher Batterien zusammengestellt werden, ist die Leydener Flasche, das ist ein Glasbecher, der bis auf einen Teil am oberen Rande innen und außen mit Stanniol belegt ist. Eine Anzahl derartiger Leydener Flaschen, oder überhaupt Kondensatoren, kann man auf zwei Weisen zu einer Batterie vereinigen, entweder man verbindet alle Innenbelegungen untereinander und ebenso alle Außenbelegungen, und erhält dann gewissermaßen einen großen Kondensator (Parallelschaltung). Oder man verbindet jedesmal die Innenbelegung eines Kondensators mit der Außenbelegung des nächsten und schaltet so alle hintereinander (Kaskadenschaltung).

Sind $C_1, C_2, C_3 \ldots$ die Kapazitäten, so erhalten bei Parallelschaltung alle Kondensatoren die gleiche Potentialdifferenz; die Kapazität der Batterie ist also in diesem Falle gleich der Summe der einzelnen Elektrizitätsmengen $E_1, E_2, E_3 \ldots$, die die einzelnen Kondensatoren aufnehmen, dividiert durch die Potentialdifferenz. Es wird also

$$C = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + \cdots}{V_i - V_a} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots$$

Die Kapazität der Batterie bei Parallelschaltung ist also gleich der Summe der Kapazitäten der Kondensatoren.

Bei Kaskadenschaltung tritt die Elektrizitätsmenge E von einer Innenbelegung auf die Außenbelegung des folgenden Kondensators, es werden also alle Kondensatoren mit derselben Elektrizitätsmenge geladen. Daher sind die Potentialdifferenzen, zu denen die einzelnen Kondensatoren geladen werden, bezw. gleich $\frac{E}{C_1}, \frac{E}{C_2}, \frac{E}{C_3}, \ldots$ Die Potentialdifferenz

der ersten Außenbelegung und der letzten Innenbelegung, also die Potentialdifferenz der Batterie, ist daher

$$V_i - V_a = \frac{E}{C_1} + \frac{E}{C_2} + \frac{E}{C_3} + \ldots,$$

mithin wird die Kapazität der Batterie in Kaskadenschaltung zu berechnen sein

$$\frac{1}{C} = \frac{V_i - V_a}{E} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots$$

Bei Kaskadenschaltung ist der reziproke Wert der Kapazität gleich der Summe der reziproken Werte der einzelnen Kapazitäten.

§ 50. Berechnung der Kapazität von Kondensatoren. Kugelkondensator, parallele Platten, Schutzringkondensator, zwei konaxiale Cylinder, Cylinder und Ebene, zwei parallele Cylinder.

Für folgende einfache Fälle ist die Kapazität unmittelbar zu berechnen.

1. Kugelförmiger Kondensator: Beide Belegungen seien konzentrische Kugelschalen mit den Radien R_1 und R_2. Betrachten wir irgend eine Kraftröhre, so verläuft diese jedenfalls radial. Ist die Größe der Kraft an der Innenbelegung gleich F_1, so ist sie an einer Stelle zwischen beiden Belegungen $F = F_1 \frac{R_1^2}{R^2}$, ferner ist $F_1 = 4\pi\sigma$, also auch $F = 4\pi\sigma \frac{R_1^2}{R^2}$. Das Linienintegral über die Kraft ergibt aber stets die Potentialdifferenz an den Enden der Kraftlinie, also ist

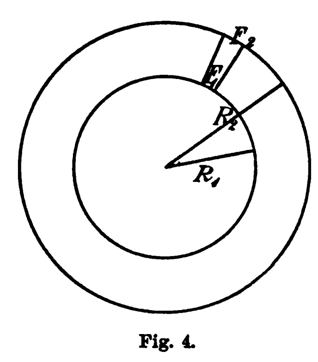


Fig. 4.

$$V_i - V_a = 4\pi\sigma R_1^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = 4\pi\sigma R_1^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Die auf der Innenbelegung vorhandene Elektrizitätsmenge ist aber

$$E = 4\pi R_1^2 \cdot \sigma,$$

also wird die Kapazität

$$C = \frac{E}{V_i - V_a} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Nach § 30 ist unter Kapazität das Verhältnis der wahren Elektrizitätsmenge zur Potentialdifferenz zu verstehen; so lange wir nur mit den geometrischen Verhältnissen rechnen, haben wir aber nur mit freien Elektrizitätsmengen zu tun. Ist das Dielektrikum im Kondensator nicht Luft, sondern hat die Dielektrizitätskonstante k, so ist die gefundene Kapazität noch mit k zu multiplizieren, also ist

$$C = k\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Rückt die Außenbelegung unendlich weit fort, so besteht der Kondensator nur noch aus der einfachen Kugel im freien Dielektrikum; dann ist $R_2 = \infty$ und die Kapazität wird einfach $C = kR_1$, wie bereits im § 30 abgeleitet.

Ist die Dicke des Dielektrikums sehr gering und wird dieselbe gleich $d = R_2 - R_1$ gesetzt, so ist $C = k\frac{R_1^2}{d}$. Ersetzen wir noch den Radius durch die Oberfläche S der Kugel, so wird $C = k\frac{S}{4\pi d}$.

2. Zwei parallele Platten, Leydener Flasche. Durch dieselbe Betrachtungsweise gelangen wir auch zu der Kapazität eines beliebigen Kondensators, dessen Belegungen überall einander parallel sind und dessen dielektrische Schicht sehr dünn ist im Verhältnis zur Ausdehnung der Belegungen. Es ist stets die Kraft senkrecht zu den Belegungen und gleich $F = 4\pi\sigma = \frac{dV}{dn}$, für diesen Fall ist nun $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V_i - V_a}{d}$; also wird $\sigma = \frac{V_i - V_a}{4\pi d}$. Ist S wieder die Fläche einer Belegung, so ist die Gesamtladung $E = \sigma S$ und die Kapazität wird

$$C = k\frac{\sigma S}{4\pi d\sigma} = k\frac{S}{4\pi d}.$$

Diese Formel gilt angenähert für einen beliebigen Kondensator aus parallelen Schichten, so weit die Dicke und die Abweichungen an den Randpartien und Kanten gegen die übrigen Abmessungen vernachlässigt werden können, insbesondere also für Leydener Flaschen. Für zwei parallele Platten gilt sie auch für größeren Plattenabstand, so lange nur derselbe im Vergleich zur Ausdehnung der Platten immer noch gering ist, so daß das Feld zwischen den Platten noch merklich homogen ist.

Hierher gehören auch die Kondensatoren, die aus Stanniolblättern und Paraffinpapier oder Glimmerblättern aufgebaut werden; es werden abwechselnd eine Stanniolplatte und eine diese überragende Platte des Isolators übereinander gelegt und dann bildet die erste, dritte, fünfte u. s. w. Stanniolplatte die eine Belegung und die zweite, vierte, sechste u. s. w. die andere. Für einen solchen Kondensator gilt ebenfalls die Formel $C = k\frac{S}{4\pi d}$, wenn man beachtet, daß von jedem Stanniolblatt beide Seiten wirksam sind; man hat also S gleich der gesamten beiderseitigen Fläche einer Belegung zu setzen.

3. Schutzringkondensator. Den Einfluß der Randpartien macht man nach Thomson bei zwei parallelen Platten völlig unschädlich, wenn man eine Platte in einen zentralen und einen ringförmigen äußeren Teil zerlegt; so entsteht der „Schutzringkondensator“. Derselbe besteht meist (Fig. 5) aus einer ebenen kreisförmigen Platte A; dieser gegenüber steht eine

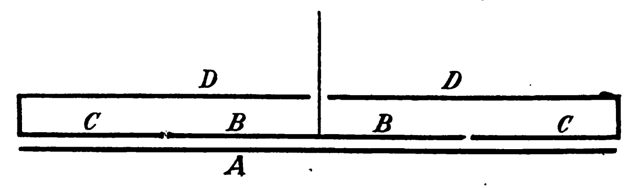


Fig. 5.

kleinere parallele Platte B. Mit B liegt genau in einer Ebene und nur einen schmalen Spalt frei lassend der Schutzring C und zweckmäßig ist es, die Rückseite von B und C noch mit einem Schutzkasten D zu überdecken, so daß auf der

Rückseite von B keine Ladung auftreten kann. Bei der Benutzung dieses Systems als Kondensator dient A als Außenbelegung, welche auf dem Potential Null gehalten wird, B, C und D werden auf gleichem Potential gehalten, aber nur die Elektrizitätsmenge auf B als Ladung des Kondensators gerechnet. Ist S die Fläche von B, so ist für diesen Kondensator die Kapazität genau

$$C = k\frac{S}{4\pi d},$$

bis auf Korrektionsglieder, die nur noch von der Breite des Spaltes zwischen B und C im Verhältnis zu d abhängen und nur bei den höchsten Genauigkeiten und sehr kleinem d eine Rolle spielen. Eine genaue Berechnung dieser Korrektion haben sowohl Maxwell*) wie Kirchhoff**) gegeben; die Größe derselben ersieht man aus der von Maxwell gegebenen Formel für die Kapazität

$$C = \frac{R^2 + R'^2}{8d} + \frac{R^2 - R'^2}{8d} \cdot \frac{R - R'}{\frac{\pi d}{\log 2} - (R - R')}.$$

Hier bedeutet R den Radius der Platte B und R' den Radius der Öffnung in C. Bezeichnet man noch mit C_1 den Wert der Kapazität, ohne das Korrektionsglied, so ist der genaue Wert nach Maxwell

$$C = C_1\left(1 + \frac{(R - R')^2}{R + R'} \cdot \frac{1}{\frac{\pi d}{\log 2} - (R - R')}\right).$$

Ist also der Spalt zwischen B und C 1 mm breit und $d = 2$ mm und $R = 5$ cm, so wird das Korrektionsglied schon merklich kleiner als $\frac{1}{1000}$.

Für den Schutzringkondensator ist die Kraft, mit der die Platte B gegen A hingezogen wird, leicht zu berechnen. Da die elektrische Ladung auf B in gleichmäßiger Dichte verteilt ist, so finden wir den auf B wirkenden elektrostatischen Druck nach § 39 gleich

$$P = pS = \frac{S}{8\pi}F^2 = \frac{S}{8\pi} \cdot \left(\frac{V}{d}\right)^2.$$

---

*) Maxwell, Treatise on Electricity, deutsch von Weinstein, S. 347.

**) Kirchhoff, Gesammelte Abhandl., S. 113.

4. Zwei konaxiale, lange Cylinder. Auch hierfür können wir dieselbe Betrachtungsweise anwenden wie bei dem Kugelkondensator, wenn wir beachten, daß in diesem Falle die Kraft im Raume außerhalb des inneren Cylinders umgekehrt mit der Entfernung abnimmt; dies ergibt sich aber aus folgender Überlegung. Wenn wir in irgend einem elektrischen Felde eine geschlossene Niveaufläche mit Metall belegt denken, und auf dieser eine Ladung verteilt denken, die gerade den durch die Fläche nach außen gehenden Kraftlinien entspricht, so ersetzt die Ladung stets vollkommen die im inneren vorhandenen Elektrizitätsmengen. Denken wir uns entsprechend bei einem Cylinder zunächst nur die Achse gleichmäßig geladen, so wird der Cylindermantel Niveaufläche sein; eine gleichmäßig verteilte Ladung auf diesem Mantel muß daher nach außen genau so wirken, wie wenn die ganze Ladung in der Achse sich befände. Die von einer auf einer Geraden gleichmäßig ausgebreiteten Ladung in irgend einem Punkte erzeugte Kraft ist durch einfache Integration zu finden. Ist P der betrachtete Punkt,

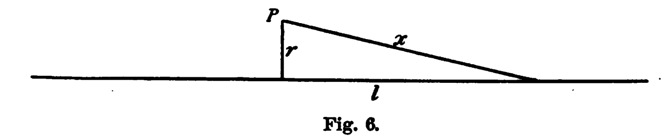


Fig. 6.

r der Abstand desselben von der Geraden, x die Entfernung eines beliebigen Punktes auf der Geraden von P, so ist $x = \sqrt{r^2 + l^2}$. Jedes Element dl der Geraden erzeugt eine Kraftkomponente in der Richtung von r von der Größe

$$\frac{dl}{x^2} \cos (xr) = \frac{r\,dl}{x^3}.$$

Die resultierende Kraft hat jedenfalls die Richtung von r und ist daher

$$F = 2 \int_0^\infty \frac{r\,dl}{\sqrt{r^2 + l^2}^3} = 2r \left(\frac{l}{r^2 \sqrt{r^2 + l^2}} \right)_0^\infty = \frac{2}{r},$$

also umgekehrt proportional mit r.

Ist jetzt wieder F_1 die Kraft an der Oberfläche des inneren Cylinders unseres Kondensators, so ist im Dielektrikum

$$F = F_1 \frac{R_1}{R} = 4\pi\sigma \frac{R_1}{R},$$

analog dem Kugelkondensator. Die Potentialdifferenz der Belegungen wird daher

$$V_1 - V_2 = 4\pi\sigma R_1 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R} = 4\pi\sigma R_1 \log \frac{R_2}{R_1}.$$

Ist jetzt l die Länge des betrachteten Cylinderstückes, so befindet sich auf diesem die Ladung

$$E = 2\pi R_1 l\sigma$$

Es wird daher die Kapazität eines Abschnittes dieses Kondensators von der Länge l

$$C = \frac{kl}{2 \log \frac{R_2}{R_1}}.$$

Dieser Ausdruck findet Anwendung auf unterirdische oder unterseeische Kabel, wo dann der innere Leitungsdraht die Innenbelegnng und der metallene Schutzmantel die Außenbelegung ist.

5. Ein langer Cylinder parallel einer Ebene. Man kann auch, wenn die eine Belegung die andere nicht vollständig umschließt, noch von einem Kondensator sprechen, wenn man annehmen darf, daß alle von einer Metallfläche ausgehenden Kraftlinien auf der anderen endigen. Dies ist der Fall bei einem parallel zu einer Ebene liegenden Cylinder, so lange nicht andere Metallkörper in der Nähe sind. Um für diesen Fall die Kapazität zu berechnen, denken wir uns die auf der Ebene und dem Cylinder verteilten Ladungen durch eine andere Ladungsverteilung ersetzt, derart, daß für diese neue Verteilung die genannten beiden Flächen Niveauflächen sind.

Wenn in der Figur 7 die Cylinderachse durch C geht und die Ebene durch 0 und der Kreis dem Cylindermantel entspricht, so genügt der geforderten Bedingung eine gleichmäßige Verteilung entgegengesetzt gleicher Elektrizitäten auf zwei Linien A_2 und A_1, die parallel zur Cylinderachse gerichtet sind und so liegen, daß 0 die Mitte zwischen

A_2 und A_1 ist, und daß der Berührungspunkt D der Tangente von A_2 an den Kreis senkrecht über A_1 liegt. Denn für diese Verteilung ist die Ebene jedenfalls schon aus Symmetriegründen eine Niveaufläche. Aber auch der Cylindermantel ist eine Niveaufläche, wie aus folgenden geometrischen Beziehungen sich ergibt.

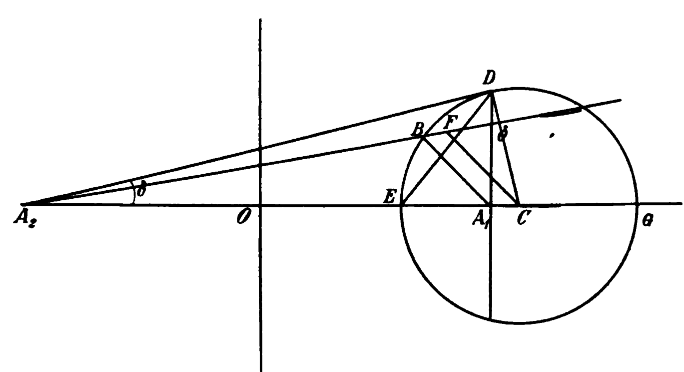


Fig. 7.

In dem Dreieck $A_2 D A_1$ wird der Winkel an der Spitze bei D durch die Linie DE halbiert, folglich verhält sich

$$\frac{A_2 D}{A_1 D} = \frac{A_2 E}{A_1 E}$$

und dieselbe Proportion gilt auch für jedes Dreieck über $A_2 A_1$, dessen Spitze auf dem Kreise liegt.

Da die von den Linien A_2 und A_1 ausgehende Kraft umgekehrt proportional den Entfernungen ist, so wirkt in einem Punkte B von A_2 eine Kraft proportional

$$\frac{1}{A_2 B} = \frac{1}{r_2},$$

und von A_1 aus eine solche proportional

$$\frac{1}{A_1 B} = \frac{1}{r_1}.$$

Ziehen wir noch die Linie CF parallel $A_1 B$, so ist

$$\Delta\, CFB \sim A_2 B A_1,$$

denn es ist Winkel $A_1 B A_2 = B F C$ und eine einfache Überlegung zeigt, daß auch Winkel $F C B = C B A_1 = B A_2 A_1$ ist, folglich ist

$$\frac{BF}{FC} = \frac{A_1 B}{A_2 B} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\frac{1}{r_2}}{\frac{1}{r_1}}.$$

Es haben also BF und FC die Richtung der von A_2 und A_1 ausgehenden Kräfte und sie sind ihnen proportional, also muß ihre Resultierende in die Richtung von CB fallen, für die angenommene Ladungsverteilung steht also die resultierende Kraft stets senkrecht auf dem Cylindermantel, mithin ist dieser tatsächlich eine Niveaufläche, und wir können dadurch das zwischen Cylinder und Ebene entstehende Feld aus den fingierten Ladungen auf A_1 und A_2 berechnen.

Die von einer gleichmäßig geladenen Linie hervorgerufene Kraft war $F = \frac{2\varrho}{r}$, wo ϱ die Dichte der Elektrizität auf der Linie sein soll; das Potential ist mithin

$$V = \int \frac{2\varrho}{r} d r = 2 \varrho \log r + \text{konst.}$$

Die beiden Linien A_2 und A_1 rufen also ein Potential hervor gleich

$$V = 2 \varrho \log \frac{r_2}{r_1} + \text{konst.}$$

Für die Cylinderfläche gilt jetzt

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{A_2 E}{A_1 E} = \frac{A_2 G}{A_1 G} = \frac{A_2 E + A_2 G}{A_1 E + A_1 G} = \frac{A_2 C}{R},$$

wenn R der Radius des Cylinders ist. Ist ferner d der Abstand der Cylinderachse von der Ebene, so ist

$$A_2 C = 2 d - A_1 C = 2 d - R \sin (D A_2 C) = 2 d - R \sin \delta.$$

Es ist also für den Cylinder

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{2d}{R} - \sin \delta.$$

Für die Ebene ist $r_2 = r_1$. Es wird daher

$$V_1 - V_2 = 2\,\varrho \log\left(\frac{2\,d}{R} - \sin\delta\right).$$

Die Elektrizitätsmenge auf einem Abschnitt des Cylinders, von der Länge l ist aber $E = \varrho\,l$, folglich wird die Kapazität

$$C = \frac{k\,l}{2 \log\left(\frac{2\,d}{R} - \sin\delta\right)},$$

oder, wenn d groß gegen R ist

$$C = \frac{k\,l}{2 \log \frac{2\,d}{R}}.$$

Diese Formel findet häufig Anwendung bei einer einzelnen parallel zur Erde gespannten Drahtleitung.

6. Zwei parallele Cylinder. Den Fall zweier parallelen Cylinder können wir aus dem vorigen ableiten, indem wir uns symmetrisch zwischen beide eine Metallfläche gelegt denken; dadurch wird dieser Fall die Hintereinanderschaltung zweier gleicher Kondensatoren der letzt besprochenen Art. Ist $2\,d = D$ der Abstand der Cylinder, so muß nach der Formel für Hintereinanderschaltung von Kondensatoren, in diesem Falle die Kapazität die Hälfte jedes einzelnen Kondensators sein, also

$$C = \frac{k\,l}{4 \log \frac{D}{R}}$$

Hiernach ist also die Kapazität zweier parallelen Leitungsdrähte zu berechnen.

Achtes Kapitel.

Elektrostatische Messungen.

§ 51. Theorie von Coulombs Drehwage.

Bei allen Messungen im elektrostatischen Felde handelt es sich stets um die Beobachtung elektrischer Kräfte, sei es, daß die Lageänderung elektrisierter Körper selbst beobachtet wird, sei es, daß die Lageänderung durch mechanisch meßbare Kräfte wieder rückgängig gemacht oder ausbalanciert wird. Je nach der Versuchsanordnung ist man dann im stande, aus der Theorie auf die Größe gewisser Elektrizitätsmengen, Potentiale oder Kapazitäten zu schließen. Ist die Anordnung derart, daß aus den geometrischen Verhältnissen die Größe der elektrischen Kräfte sich berechnen läßt und gleichzeitig auch die gegenwirkende mechanische Kraft bestimmbar ist, so erhält man absolute Maßbestimmungen, d. h. man erhält die gesuchten elektrischen Größen im absoluten Maßsystem.

Der älteste Apparat, der dies zu leisten vermag, ist die bereits im § 32 genannte Coulombsche Drehwage. Ein leichter isolierender Wagebalken ist an einem feinen Draht um eine Vertikalachse drehbar aufgehängt und trägt an einem Ende eine leitende, meist vergoldete Kugel A_1. Wird an die Stelle der Ruhelage dieser Kugel eine zweite, gleich große, geladene, isolierte Kugel A_2 gebracht, so daß A_1 berührt und bei Seite gedrängt wird, so verteilt sich die Ladung zu gleichen Teilen auf beide Kugeln, und es tritt Abstoßung ein. Durch Torsion des Aufhängedrahtes um einen

Winkel ϑ kann der Ausschlagswinkel des Dreharmes auf die Größe a zurückgeführt werden. War dann e die ursprünglich mit A_2 eingeführte Elektrizitätsmenge, so hat jetzt jede Kugel die Menge $\frac{e}{2}$; ist d der Abstand der Kugelmitten und r der Radius des Dreharmes, so wirkt zwischen den Kugeln die elektrische Kraft

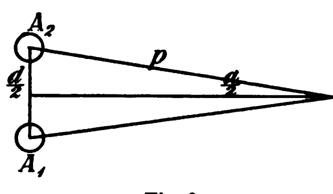


Fig. 8.

$f = \frac{e^2}{4d^2}$. Es ist aber (Fig. 8) $\frac{d}{2} = r \sin\frac{a}{2}$, also wird

$$f = \frac{e^2}{16\, r^2 \sin^2\frac{a}{2}}.$$

Diese Kraft wirkt an dem Hebelarm $r\cos\frac{a}{2}$, übt also ein Drehmoment aus von der Größe

$$d = f r \cos\frac{a}{2} = \frac{e^2\cos\frac{a}{2}}{16 r \sin^2\frac{a}{2}}.$$

Diesem Drehmoment wird durch die Torsion des Aufhängedrahtes das Gleichgewicht gehalten; die Torsion erfolgt aber um den Winkel $\vartheta + a$ und ist diesem proportional, also gleich $c(\vartheta + a)$, wo c eine von der Beschaffenheit des Drahtes abhängige Konstante ist. Es ist also

$$c(\vartheta + a) = \frac{e^2\cos\frac{a}{2}}{16\, r \sin^2\frac{a}{2}}$$

und folglich

$$e^2 = 16\, c\, r\, (\vartheta + a) \sin\frac{a}{2} \operatorname{tg}\frac{a}{2}.$$

Die Konstante c ist durch mechanische Messungen aus der Schwingungsdauer und dem Trägheitsmoment des Wagebalkens zu bestimmen, und es ist auf diese Weise eine Elektrizitätsmenge in absolutem Maße gemessen.

Diese Formel stellt jedoch nur eine erste Annäherung dar und bedarf für genauere Messungen noch nach zwei Richtungen einer Korrektion. Bei der Ableitung ist vorausgesetzt, daß der Abstand der Kugeln so groß ist, daß für die Wirkung derselben aufeinander die Elektrizitäten noch ganz in den Mitten derselben vereinigt gedacht werden können. Bei der Drehwage wird dies aber im allgemeinen nicht mehr der Fall sein, sondern die Nähe der Kugeln wird auf ihnen eine ungleichmäßige Verteilung der Elektrizitäten hervorrufen, die bei der Berechnung der elektrischen Kraft noch ein Ergänzungsglied erforderlich macht. Außerdem muß wegen der Zartheit der Versuche der ganze Apparat notwendig in ein Gehäuse eingeschlossen und gegen Luftströmungen geschützt sein. Auf diesem Gehäuse werden nun notwendig Influenzwirkungen auftreten, die auf die Kugeln zurückwirken. Ist das Gehäuse aus Glas, so sind diese Wirkungen nicht zu berechnen, man muß dasselbe daher aus Metall herstellen und kann dann noch ein zweites Korrektionsglied berechnen. Beide Korrektionsglieder sind schwierig abzuleiten, und da sie beide von recht erheblichem Einfluß auf die Messungen sind, so ist es außerordentlich schwierig, mit der Coulombschen Drehwage absolute Messungen einigermaßen genau durchzuführen; da die Versuche außerdem außerordentlich hohe Anforderungen an die Isolation stellen, so dienen sie gegenwärtig kaum noch zu wirklichen Messungen und haben nur mehr historisches Interesse. Auf die Berechnungen der Korrektionsglieder soll daher hier umsomehr verzichtet werden, als schon eine besondere Bearbeitung der Potentialtheorie in dieser Sammlung erscheint und im übrigen auf die größeren Werke von Maxwell und Mascart-Joubert verwiesen werden kann.

§ 52. Thomsons absolutes Elektrometer.

An die Stelle der Coulombschen Drehwage ist für absolute Messungen Thomsons Schutzring-Elektrometer getreten. Dasselbe besteht aus einem Schutzring-Kondensator, wie er im § 49,3 beschrieben ist. Die kleinere Platte *B* (siehe Fig. 5) dieses Kondensators ist beweglich gemacht und an einem Wagebalken oder einer Federwage aufgehängt und ihre genaue Lage in der Ebene des Schutzringes an einer

Marke erkennbar. Für die Kraft, die die Platte B gegen die Platte C zieht, hatten wir gefunden

$$P = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V}{d}\right)^2,$$

wo V die Potentialdifferenz zwischen den Platten bedeutet. Diese Kraft kann nun bestimmt werden durch auf die Platte B aufzusetzende Gewichte; dazu belastet man zunächst, wenn alle Teile ungeladen sind, die Platte B mit soviel Gewichten, daß die Marke einspielt. Dann legt man die Potentialdifferenz an und muß nun Gewichte abnehmen, um wieder Einspielen der Marke zu erzielen; diese Gewichte messen die elektrische Kraft und gestatten, die Potentialdifferenz in absolutem Maße zu bestimmen. In Bezug auf die Korrektion wegen der Breite der Furche zwischen B und dem Schutzring, sei auf § 49,3 verwiesen. Um von dem schwierig genau zu bestimmenden kleinen Plattenabstand d unabhängig zu sein und zugleich den Apparat empfindlicher zu gestalten, kann man folgendermaßen verfahren: Die Platte A wird durch eine feine Mikrometerschraube in genau meßbarer Weise vertikal beweglich gemacht. Man lädt dann B und den Schutzring auf ein beliebiges, höheres und konstantes Potential V_0, während A abgeleitet ist und sich im Abstande d befindet; durch Regulieren der Gewichte bewirkt man Einspielen und hat dann die Kraft

$$P = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V_0}{d}\right)^2.$$

Dann legt man das zu messende Potential an A an und muß, um wieder Einspielen zu erzielen, die Platte A um die genau meßbare Größe a verschieben, dann wird

$$P = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V_0 - V}{d - a}\right)^2.$$

Es ist dann also

$$V_0 = d\sqrt{\frac{8\pi P}{S}}$$

und

$$V_0 - V = (d - a)\sqrt{\frac{8\pi P}{S}},$$

woraus durch Substraktion das gesuchte Potential gefunden wird zu

$$V = a\sqrt{\frac{8\pi P}{S}}.$$

Es bedarf also nur noch der Messung der Fläche S und der Kraft P.

§ 53. Eichen des Elektroskops mit dem Kondensator.

Nur in wenigen Fällen ist es nötig, die im vorigen Paragraphen beschriebenen, absoluten Elektrometer zu benutzen, bei den meisten Untersuchungen genügt es, ein Instrument zu besitzen, daß die Größe der elektrischen Kräfte in einem beliebigen Maße relativ zueinander anzeigt. Solche Instrumente sind die Elektroskope, wie sie bereits im § 44 definiert sind. Ein leichter Körper, Aluminiumblättchen, drehbare Nadel, Hollundermarkkugeln am Zwirnsfaden, Strohhalm, Papierfähnchen oder ähnliches, wird von einem festen Metallkörper bei der Elektrisierung beider abgestoßen; wesentlich bei der Benutzung solchen Apparates zu Messungen ist, daß der Ausschlag nur durch die Ladung des Metallkörpers und nicht auch noch durch andere, äußere elektrische Kräfte beeinflußt wird. Man erreicht dies für alle Fälle am sichersten, indem man den ganzen Apparat in einen metallenen Schutzkasten einschließt und nur zum Elektroskopkörper eine isolierte Zuleitung durch die Schutzhülle eintreten läßt. Der Elektroskopkörper ruft dann im Innern des Schutzkastens ein elektrisches Feld hervor, und die Kräfte dieses Feldes bestimmen dann allein die Größe der Ausschläge. Es ist ersichtlich, daß unter diesen Verhältnissen die Ausschläge immer von der Potentialdifferenz zwischen dem Innenkörper und der Schutzhülle abhängen, denn, hat nur der Innenkörper eine Ladung und ist die Schutzhülle abgeleitet, so kann der Ausschlag sich nicht ändern, wenn wir beiden Teilen den gleichen, ganz beliebigen Potentialzuwachs erteilen, da ein solcher auf den Zustand im Innern eines metallenen Hohlraumes keinen Einfluß hat. Jedes Elektroskop dieser Art mißt also direkt Potentialdifferenzen, aus diesen kann man auf die zugeführten Elektrizitätsmengen schließen, wenn man

sich überzeugt hat, daß die Kapazität des Systems durch die Lageänderung des beweglichen Teiles sich nicht merklich ändert, oder, wenn man diese Änderung ermittelt hat.

Im allgemeinen wird ein derartiges Elektroskop, um zu Messungen brauchbar zu sein, noch einer empirischen Eichung bedürfen, d. h. es wird noch festzustellen sein, welche relativen Werte die verschieden großen Ausschläge gegeneinander haben. Kann man das Elektroskop unmittelbar mit einem absoluten Elektrometer vergleichen, so bedarf die Ausführung der Eichung keiner weiteren Erläuterung, ebenso, wenn man in der Lage ist, an die beiden Teile des Elektroskops eine Reihe verschiedener, bekannter Potentialdifferenzen anzulegen, wie dieselben durch die später zu besprechenden galvanischen Batterien geboten werden. Ist eine solche direkte Eichung nicht möglich, so kann man auf verschiedene Weise zum Ziele gelangen.

1. Hat man nur eine derartige, konstante Potentialdifferenz zur Verfügung, so kann man unter Benutzung eines Plattenkondensators eine Auswertung der Skala im Elektroskop in folgender Weise vornehmen. Die Kapazität des Plattenkondensators ist umgekehrt proportional dem Plattenabstand; ist dieser zwischen zwei festen Anschlägen veränderlich und meßbar, so kennt man das Verhältnis der Kapazitäten des Kondensators in seinen beiden Endstellungen. Lädt man dann den Kondensator in der einen Stellung mit der unveränderlichen Potentialdifferenz einer galvanischen Batterie und bringt ihn dann in die andere Stellung, nach Wiederentfernen der Batterie, so ist die Potentialdifferenz der Platten in bekannter Weise im allgemeinen größer geworden. Verbindet man jetzt die Platten mit den Zuleitungen zum Elektroskop, so gibt dies einen Ausschlag, der jedoch wegen der hinzukommenden Kapazität des Elektroskops zunächst noch einer kleineren Potentialdifferenz als der des Kondensators entspricht. Wiederholt man jetzt jedoch, ohne das Elektroskop entladen zu haben, das Schließen des Kondensators, Laden, Öffnen und Wiederanlegen an das Elektroskop, so wird der Ausschlag größer, und bei mehrmaliger Wiederholung wird sich derselbe bald einer gewissen Grenze nähern; dieser Grenzwert des Ausschlages entspricht dann offenbar der berechneten Potentialdifferenz des geöffneten Kondensators. Durch Verstellen der Anschläge des Konden-

sators auf verschiedene Plattenabstände, kann man so die Werte beliebiger Skalenteile am Elektroskop bestimmen.

Die Hauptschwierigkeit bei diesem Verfahren liegt in der genauen Messung des Abstandes der Kondensatorplatten, für welche besondere Mikrometereinrichtung vorhanden sein muß. Man kann diese Schwierigkeit umgehen, wenn man mehrere gleiche galvanische Elemente zur Verfügung hat. Man stellt die Bewegung der Kondensatorplatten so ein, daß bei Anlegen eines Elementes und mehrfachem Öffnen und Schließen des Kondensators, das Elektroskop den kleinsten zu verwendenden Ausschlag gibt. Die Benutzung von zwei, drei, vier u. s. w. Elementen ergibt dann die Ausschläge, welche der zwei-, drei-, vier- . . . fachen Potentialdifferenz entsprechen, und das Elektroskop ist dann nach Potentialdifferenzen geeicht, wenn auch in einer willkürlichen Einheit, was jedoch für viele Fälle genügen wird. Zur Bestimmung des Wertes dieser Einheit muß dann das Verhältnis der Kapazitäten des Kondensators in seinen beiden Stellungen nach einer der Methoden zur Kapazitätsbestimmung, (siehe weiter unten) ermittelt werden (Exner).

2. Hat man eine Batterie, welche am Elektroskop direkt einen deutlichen Ausschlag gibt, so kann man bei Benutzung einer Leydener Flaschenbatterie, einer Influenzmaschine und eines zweiten Elektroskopes ähnlicher Empfindlichkeit in folgender Weise eine Kalibrierung vornehmen (Braun). Das Gehäuse des Elektroskops und die Außenbelegung der Leydener Batterie liegen dauernd an Erde. Ein Pol der gut isolierten Batterie ist dauernd mit der Innenbelegung verbunden, der andere mit dem Elektroskop. Ist dann die Innenbelegung zunächst auch noch abgeleitet, so zeigt das Elektroskop die Potentialdifferenz der Batterie. Das zweite Elektroskop wird mit dem ersten verbunden, und es wird der dieser Potentialdifferenz entsprechende Ausschlag beobachtet. Jetzt wird das zweite Elektroskop an die Innenbelegung gebracht und diese mit der Influenzmaschine so weit geladen, bis das zweite Elektroskop wieder denselben Ausschlag gibt; dann zeigt das erste den der doppelten Potentialdifferenz entsprechenden Ausschlag. Durch Wiederholung des Verfahrens kann man so die drei-, vier- und mehrfachen Ausschläge festlegen und erhält beide Elektroskope gleichzeitig geeicht.

3. Während diese Eichungen die Elektroskope für Messung von Potentialdifferenzen kalibrieren, ergibt das im ersten Kapitel, § 8, angedeutete Verfahren eine Eichung nach Ladungen. Ist mit dem Elektroskop ein metallener Hohlkörper verbunden, in welchen sich eine isolierte Probekugel einführen läßt, so kann man diesem, aus ein und derselben Quelle, wiederholt genau dieselbe Ladung erteilen und ganz auf das Elektroskop durch Einführen in den Hohlraum übertragen. Dadurch beobachtet man an diesem die Ausschläge, die der ein-, zwei-, drei- u. s. w. -fachen Ladung entsprechen. Die so erhaltene Kalibrierung kann mit der nach den vorigen Methoden erhaltenen nur dann übereinstimmen, wenn durch die Lageänderung des bewegten Teiles im Elektroskop eine nennenswerte Kapazitätsänderung desselben nicht eintritt. Im allgemeinen jedoch werden beide Arten der Eichung nicht übereinstimmende Werte ergeben.

§ 54. Das Quadrantelektrometer.

Eine dritte Gruppe von Elektrometern wird durch diejenigen Instrumente gebildet, bei welchen das Gesetz der Ablenkung des bewegten Teiles von vornherein bekannt ist, so daß eine besondere Graduierung wegfallen kann. Hierher gehören die älteren Elektrometer von Dellmann und Kohlrausch; ersteres benutzt nach Art der Drehwage die Torsion eines Aufhängefadens, letzteres die magnetische Richtkraft. Da beide jedoch gegenwärtig durch das dritte hierher gehörende Instrument, das Quadrantelektrometer von Thomson, im praktischen Gebrauche vollständig verdrängt sind, soll hier auch nur das letztere näher behandelt werden.

Der bewegliche Teil im Quadrantelektrometer ist eine in horizontaler Ebene schwingende Nadel, die ihre Richtkraft durch eine Bifilarsuspension oder die Torsion des Aufhängedrahtes erhält. Thomson hat dieser Nadel eine Biskuitform gegeben und läßt dieselbe im Innern einer flachen, kreisförmigen Metallschachtel schwingen; diese Schachtel selbst ist durch zwei zueinander senkrechte Diametralschnitte in vier von einander isolierte Quadranten geteilt. Diese Ausführungsform ist auch von den meisten

beibehalten worden, Edelmann hat die Quadrantenschachtel ersetzt durch vier Cylindersegmente und die Nadel entsprechend mit konzentrischen Cylindersegmenten an ihren Enden versehen. Für die Theorie sind beide Ausführungsformen gleichwertig.

Im Gebrauche sind stets je zwei gegenüberliegende Quadranten leitend verbunden, also auf gleichem Potential. Sind dann V_1 und V_2 die Potentiale der beiden Quadrantenpaare und V dasjenige der Nadel, so werden auf die letztere elektrische Kräfte wirken, und diese wird sich so weit bewegen, bis den elektrischen Kräften durch die Richtkraft der Aufhängung das Gleichgewicht gehalten wird. Benutzt werden beim Quadrantelektrometer stets nur sehr kleine Ausschläge, die durch Spiegelablesung gemessen werden, und man kann daher die Kapazitätsverschiedenheit bei den verschiedenen Ausschlägen vernachlässigen und kann die Größe der elektrischen Kräfte den durch die Spiegelablesung in Skalenteilen erhaltenen Ausschlägen proportional setzen; je nachdem Bifilaraufhängung oder Torsion verwendet wird, sind diese Ausschläge in bekannter Weise auf den Sinus des Ausschlagswinkels bezw. den Winkel selbst zu reduzieren. Diesen Ausschlägen proportional ist das in jeder Lage auf die Nadel wirkende elektrische Drehmoment. Hätten beide Quadrantenpaare gleiches Potential, so würde gar kein solches Drehmoment auftreten, dieses ist vielmehr offenbar bei den kleinen Ausschlägen proportional der Potentialdifferenz der Quadrantenpaare, also der Größe $V_1 - V_2$. Ferner wird dasselbe aber auch proportional sein müssen der Größe der in Wirkung tretenden Elektrizitätsmengen; fassen wir die Nadel mit der sie umgebenden Schachtel als Kondensator auf, so sind die in demselben aufgespeicherten Elektrizitätsmengen proportional der Differenz des Nadelpotentials und den mittleren Potential der Quadrantenpaare, also der Größe $V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$. Bedeutet A daher einen Proportionalitätsfaktor, so ist in jedem Falle im Quadrantelektrometer der Ausschlag

$$a = A(V_1 - V_2)(V_1 - \tfrac{1}{2}(V_1 + V_2)).$$

Zu einer strengen Ableitung dieser Formel gelangt man auf folgende Weise:

Befindet sich die Nadel in der Symmetrielage, so besteht eine bestimmte Verteilung von Elektrizität auf den

Quadranten und der Nadel; es seien E_1, E_2 und E die betreffenden Elektrizitätsmengen. Wird dann die Nadel um den Winkel a gedreht, so verteilt sich die Elektrizität anders und wir mögen jetzt die Ladungen haben E_1', E_2' und E'. Ist nun die Nadel breit genug, so daß ihre Randpartieen von den Rändern der Quadranten auch nach der Drehung weit abstehen, so besteht die Veränderung der Ladungen in nichts anderem, als daß das Winkelstück a der Nadelfläche aus dem einen Quadrantenpaar in das andere hinübergetreten ist. Bezeichnen wir mit C jetzt die Kapazität eines Abschnittes der Nadel, der von den Rändern weit absteht und die Winkeleinheit (in einem beliebigen Winkelmaß, z. B. 1 Skalenteil Ausschlag) umfaßt, so muß dann sein

$$E' = E - a\,C(V - V_1) + a\,C(V - V_2),$$
$$E_1' = E_1 + a\,C(V - V_1),$$
$$E_2' = E_2 - a\,C(V - V_2).$$

Nun ist die elektrische Energie des Systems vor der Drehung
$$W = \tfrac{1}{2}(E V + E_1 V_1 + E_2 V_2)$$
und nach derselben
$$W' = \tfrac{1}{2}(E' V + E_1' V_1 + E_2' V_2),$$
also ist die Energieänderung
$$W' - W = \tfrac{1}{2} a\,C[(V - V_1)V - (V - V_2)V - (V - V_1)V_1 + (V - V_2)V_2]$$
$$= a\,C(V_1 - V_2)(V - \tfrac{1}{2}(V_1 + V_2)).$$

Diese Energieänderung entspricht der Arbeit, die die drehenden Kräfte leisten, sie ist also gleich dem Produkt aus dem Drehmoment und dem Winkel a. Das Drehmoment selbst ist daher gleich der Größe
$$C(V_1 - V_2)(V - \tfrac{1}{2}(V_1 + V_2))$$
und dieser Größe proportional müssen die beobachteten Ausschläge sein.

Sind zwei der Potentiale V, V_1, V_2 bekannt, so kann man nach dieser Beziehung das dritte aus den Ausschlägen des Elektrometers bestimmen. Es kann nun im allgemeinen das Quadrantelektrometer in drei verschiedenen Schaltungsweisen benutzt werden.

1. Ohne Hilfsladung. Die Nadel und das eine Quadrantenpaar sind dauernd miteinander verbunden, so daß $V = V_1$ ist. Es wird dann durch Ableitung zur Erde entweder V oder V_2 dauernd gleich Null gemacht; die Ausschläge sind dann, wie sich aus der obigen Formel ergibt proportional mit V_2^2 bezw. V^2. Die Ausschläge erfolgen also stets nach derselben Seite hin und sind für entgegengesetzt gleiche Potentiale die gleichen; durch Vertauschen der Quadranten gegeneinander muß man die gleichen Ausschläge nach der anderen Seite erhalten. Besteht die Gleichheit der Ausschläge bei Anlegung der entgegengesetzten Potentiale nicht, so zeigt das, daß zwischen der Nadel und dem Metallkörper, dessen Potential man messen will, noch eine konstante Potentialdifferenz besteht, die sich beim Vertauschen der Potentiale nicht mit umkehrt. Solche Potentialdifferenzen zwischen sich berührenden Metallen werden tatsächlich beobachtet, sogenannte „Kontaktpotentiale“, doch werden die bei dieser Schaltung mit dem Quadrantelektrometer zu messenden Potentiale im allgemeinen so groß sein, daß die Kontaktpotentiale nicht störend zu merken sind; Mittelnehmen aus den ungleichen Ausschlägen eliminiert dieselben.

2. Nadelschaltung. Die Nadel wird durch eine Batterie von vielen kleinen, galvanischen Elementen oder durch die Innenbelegung einer Leydener Flasche auf konstantes höheres Potential gebracht; ein Quadrant wird abgeleitet ($V_2 = 0$), an den anderen wird das zu messende Potential V_1 angelegt. Die Ausschläge sind proportional $V_1 (V - \frac{1}{2} V_1)$. Ist also V nicht sehr groß, im Vergleich zu V_1, so sind die Ausschläge nicht symmetrisch, wenn man V_1 durch ein entgegengesetzt gleiches Potential ersetzt, auch sind sie diesem Potential nicht genau proportional. Durch Anwendung entgegengesetzt gleicher Potentiale, entweder für V_1 oder für V und Mittelnehmen aus den entsprechenden Ausschlägen, erhält man Werte, die dem V_1 genau proportional sind. Beim Messen kleiner Potentiale werden hier die Kontaktpotentiale meist sehr merkbar sein, man mißt zunächst stets das gesuchte Potential V_1 plus der Kontaktdifferenz zwischen dem zu prüfenden Metallkörper und dem betreffenden Quadranten. Erst wenn man V durch $-V$ und V_1 durch $-V_1$ ersetzt, und aus allen vier Aus-

schlägen das Mittel nimmt, erhält man einen Wert, der dem V_1 porportional ist.

Ist die Nadel auf konstantes Potential geladen, so kann man auch direkt eine Potentialdifferenz, z. B. die Potentialdifferenz an den Polen eines galvanischen Elementes, messen, indem man die beiden Pole mit den Quadrantenpaaren verbindet. Nur wenn das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(V_1 + V_2) = 0$ ist, werden die Ausschläge beim Vertauschen der Quadranten symmetrisch; das Mittelnehmen bei unsymmetrischen Ausschlägen ergibt aber stets die gesuchte Potentialdifferenz.

3. Quadrantschaltung. Die beiden Quadranten werden durch eine Ladungsbatterie auf eine konstante Potentialdifferenz gebracht; in diesem Falle wird man meistens durch Ableiten der Mitte der Ladungsbatterie die Größe $V_1 + V_2 = 0$ machen können, dann sind die Ausschläge direkt dem an die Nadel angelegten Potential proportional, und bei Vertauschen der Quadranten symmetrisch. Bei dieser Schaltung wird meistens das Kontaktpotential der Nadel gegenüber dem Metall der Quadranten bemerkbar sein, da die Nadel meist aus anderem Material (Aluminium) besteht als die Quadranten. Das Anlegen der Ladungsbatterie an die Quadranten wird daher auch bei abgeleiteter Nadel schon einen Ausschlag geben, der bei Vertauschen der letzteren die gleiche Größe nach der anderen Seite haben muß. Durch Hinzufügen eines bekannten Potentials zu der Nadel kann die Kontaktdifferenz der Nadel gegen die Quadranten leicht bestimmt werden. (Hallwachs.)

§ 55. Vergleichen von Kapazitäten.

Die zur Messung von Potentialen geeichten, vorgenannten Elektrometer können nun auch noch verwandt werden zum Vergleichen von Kapazitäten. Hat man zwei Körper mit den Kapazitäten C_1 und C_2 und lädt den ersten auf das Potential V_1, während der zweite noch das Potential Null hat, und verbindet dann beide Körper, so werden sie ein geringeres Potential annehmen. Da die Elektrizitätsmenge E hierbei nicht geändert wird, so ist

$$E = C_1 V = (C_1 + C_2) V',$$

oder
$$\frac{C_1 + C_2}{C_1} = \frac{V}{V'},$$
$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{V}{V'} - 1.$$

Mißt man V und V' mit einem Elektrometer, so erhält man hierdurch das Verhältnis der Kapazitäten. Ist C_1 bekannt, also dieser Körper einer derjenigen, deren Kapazität nach einer der im vorigen Kapitel ausgeführten Methoden berechnet werden kann, z. B. ein Schutzringkondensator, so kann man eine beliebige Kapazität hiernach bestimmen.

Bei dieser Herleitung ist noch vorausgesetzt, daß die Kapazität c des Elektrometers selbst gegenüber C_1 und C_2 nicht in Betracht kommt. Ist dies nicht zulässig, so kann man c selbst nach dieser Methode bestimmen. Man lädt das Elektrometer allein auf das Potential V, verbindet es mit C_1 und erhält das Potential V'. Dann ist
$$cV = (c + C_1)V',$$
also
$$\frac{C_1}{c} = \frac{V}{V'} - 1,$$
fügt man jetzt noch C_2 hinzu und erhält V'', so wird
$$\frac{C_2}{C_1 + c} = \frac{V'}{V''} - 1,$$
woraus sich dann, in Verbindung mit dem vorigen, ergibt:
$$\frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{V'}{V''} - 1\right)\left(1 + \frac{1}{\frac{V}{V'} - 1}\right).$$

Es sind auch noch andere elektrostatische Methoden zur Kapazitätsvergleichung entwickelt worden, doch da dieselben gegenüber den genaueren Methoden, die auf der Verwendung elektrischer Ströme beruhen und erst später zu besprechen sind, praktisch zurückgetreten sind, mögen dieselben hier übergangen werden und in Bezug auf dieselben auf die größeren Werke von Maxwell und Mascart-Joubert verwiesen werden.

II. Teil.
Elektrokinetik.

Neuntes Kapitel.
Vorgänge bei der Änderung des elektrischen Feldes.

§ 56. Grundversuche über die elektrische Leitung.

Bei allen, in den vorangehenden Kapiteln behandelten Eigenschaften des elektrischen Feldes war stets die Voraussetzung gemacht, daß das Feld einen Gleichgewichtszustand erreicht hatte, das heißt, genauer gesprochen, daß die Ausgangspunkte der elektrischen Kräfte, die Elektrizitätsmengen, unter dem Einfluß dieser Kräfte keine Bewegungen mehr machten, und daß auch die verschiedenen Medien nicht mehr durch andere äußere Kräfte bewegt wurden; denn nur unter dieser Voraussetzung ist die allem zu Grunde gelegte Ausmessbarkeit des elektrischen Feldes in der besprochenen Weise möglich. Auch wenn an einigen Stellen von der Veränderung des Systems der elektrischen Körper gesprochen wurde, so heißt das dort nur, daß der Unterschied festgestellt wird zwischen zwei Feldern, die in einander übergeführt werden können, die bei der Betrachtung aber beide bereits wieder den Gleichgewichtszustand erreicht haben.

Sehen wir ab von äußeren Kräften, durch welche die elektrisierten Körper selbst bewegt werden könnten, sondern denken diese vielmehr in ihrer gegenseitigen Lage fest fixiert, dann wird eine Veränderung unter dem Einfluß der elektrischen Kräfte allein eintreten müssen, sobald zwischen zwei

Metallkörpern, die sich auf verschiedenem Potential befinden, eine leitende Verbindung hergestellt wird; denn Gleichgewicht kann auf einem Leiter nur bestehen, wenn er sich in seiner ganzen Ausdehnung auf gleichem Potential befindet. Die Richtung der Kraftlinien muß überall senkrecht zur Oberfläche des Leiters stehen, und so lange muß eine Veränderung im Felde, nach Anlegen der leitenden Verbindung eintreten durch Änderung der freien Elektrizitätsmengen auf den Leitern, bis wieder die Kraftlinien auf jeder Stelle der nun zu einem einzigen Leiter verbundenen Metallkörper senkrecht stehen. Die folgenden Versuche machen die Vorgänge der Veränderung deutlich.

Lädt man zwei Elektroskope auf verschiedenes Potential und verbindet sie miteinander, so stellen sie sich auf gleiches Potential ein. Sind es zwei gleiche Elektroskope mit Papierfähnchen als Index, so läßt sich dieser Vorgang an der Gleichstellung der Fähnchen leicht sichtbar machen. Stellt man die Elektroskope in größerem Abstande von einander auf und wiederholt den Versuch mehrfach, indem man aber immer andere leitende Stäbe zur Herstellung der Verbindung benutzt, so läßt sich der sehr verschieden schnelle Ausgleich der Potentialdifferenz je nach der leitenden Substanz, sehr leicht deutlich machen. Ein Metall als leitende Brücke stellt den Ausgleich scheinbar momentan her, ein trockener Holzstab erfordert schon eine je nach der Trockenheit oft sehr merkliche Zeit für die Herstellung des neuen Gleichgewichtszustandes. Sehr gut ist der allmähliche Ausgleich durch dünne Fischbeinstäbe zu verfolgen. Verwendet man zwei, drei oder mehr möglichst gleich dünne Fischbeinstäbe, die man nebeneinander gleichzeitig benutzt, und verfolgt die Zeit des Ausgleichs mit der Sekundenuhr, so kann man feststellen, daß diese Zeit nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. s. w. von derjenigen ist, die für den Ausgleich durch einen einzigen Stab erforderlich ist. Stellt man dagegen die Verbindung durch zwei oder drei hintereinander verbundene Stäbe her, so daß einer immer die Verlängerung des anderen bildet, so ist die Ausgleichszeit zwei- bezw. dreimal so groß, wie beim einfachen Stab.

Noch deutlicher werden diese Versuche, wenn die Elektroskope mit Körpern großer Kapazität verbunden sind, also

etwa den Innenbelegungen von zwei Leydener Flaschen, deren Außenbelegungen abgeleitet sind. Ist anfangs nur ein Elektroskop geladen, so teilt sich durch die Verbindung die Ladung dem anderen mit. Sind beiden zu Anfang entgegengesetzt gleiche Ladungen erteilt, so gleichen sich dieselben vollständig gegeneinander aus.

Ist die leitende Verbindung von beträchtlicher Länge, z. B. durch einige Meter eines möglichst gleichmäßigen Bindfadens hergestellt, so kann man an einer Reihe von Punkten dieses Fadens noch weitere kleine Doppelfähnchen aus Papier anhängen, die dann stets den augenblicklichen Ladungszustand der betreffenden Stelle des Fadens anzeigen und man sieht dann alle die Übergangspotentiale zwischen den äußersten Werten an den Elektroskopen selbst.

§ 57. Versuche von Rieß.

Jedes System elektrisierter Körper repräsentiert, wie wir im siebenten Kapitel sahen, einen bestimmten Wert elektrischer Energie. Erfolgt nun ein Potentialausgleich nach Art der Versuche des vorigen Paragraphen, so wird stets die elektrische Energie kleiner, denn die Bewegung der Elektrizitätsmengen erfolgt stets so, daß die elektrischen Kräfte sich so weit als möglich ausgleichen. Nach dem allgemeinen Prinzip der Erhaltung der Energie, wonach stets an Stelle des Verschwindens irgend welcher Energie einer Art eine genau äquivalente Energiemenge anderer Art auftreten muß, haben wir zu erwarten, daß auch an Stelle der verschwindenden elektrischen Energie des Feldes irgendwo eine andere Energieform sich nachweisen lassen muß. Dieser Nachweis ist durch die Versuche von Rieß über die Entladung von Leydener Batterien erbracht worden.

Läßt man eine Leydener Batterie sich durch einen Draht entladen, so tritt die Entladung bereits ein, bevor der Draht die metallische Leitung vollständig hergestellt hat; schon wenn der Draht noch ein kurzes Stück von der betreffenden Belegung der Flasche entfernt ist, tritt eine Entladung ein, indem das letzte Stück Luftstrecke von einem Funken durchschlagen wird. Dieser Funke weist bedeutende Wärme- und Lichtwirkungen auf, die einen Teil der verschwindenden

elektrischen Energie ersetzen; aber Rieß hat gezeigt, daß auch in der Drahtleitung selbst Wärme frei wird. Die im Draht frei werdende Menge konnte er messen, indem er denselben das Gefäß eines empfindlichen Luftthermometers durchsetzen ließ, und er fand so, daß diese Wärmemenge proportional war den entladenen Elektrizitätsmengen und der Potentialdifferenz, auf welche die Batterie geladen war, also proportional der verschwundenen Menge elektrischer Energie. War der Draht sehr lang und fein und der Funke klein, so daß die in diesem auftretende Wärme nicht sehr in Betracht kam, so wurde im Draht eine Wärmemenge gemessen, die der entladenen elektrischen Energie äquivalent war.

Stellt man die ganze Länge des Drahtes aus demselben Metall her und schaltet der Reihe nach verschiedene, gleich große Abschnitte dieses Drahtes in das Luftthermometer ein, so zeigt sich, das gleich lange Abschnitte auch gleiche Wärmemengen entwickeln.

Setzt man die Drahtleitung aus gleich langen Abschnitten verschiedener Dicke von demselben Material zusammen, so wird in den dünnen Abschnitten mehr Wärme entwickelt als in den dicken, und zwar sind die freiwerdenden Wärmemengen umgekehrt proportional den Querschnitten.

Besteht die Drahtleitung aus gleich dicken Drähten von verschiedenem Metall, so muß man von jedem Metall eine andere Drahtlänge in das Luftthermometer einfügen, um stets die gleiche Wärmemenge in demselben zu erhalten. Anstatt verschiedene Längen zu nehmen, würde man nach dem vorigen auch in demselben Verhältnis dünnere Drähte von der gleichen Länge nehmen können. Es ergibt sich daher aus diesen Versuchen, daß die bei der gleichen Entladung in Drahtabschnitten auftretenden Wärmemengen proportional sind der Länge, umgekehrt proportional dem Querschnitt des Drahtes und noch bestimmt sind durch einen für jedes Metall besonders zu bestimmenden Faktor.

Zehntes Kapitel.

Erweiterung des hydrodynamischen Bildes.

---

§ 58. Wandern der Kraftlinien.

Um jetzt auch von den im letzten Kapitel beschriebenen Entladungsvorgängen eine theoretische Darstellung zu erhalten, liegt es nahe, auch hierfür zunächst die Anwendung des im zweiten Kapitel entwickelten hydrodynamischen Bildes zu versuchen.

Betrachten wir das Feld zwischen zwei entgegengesetzt elektrisierten Platten, so ist dasselbe durch eine Anzahl von Einheitsröhren durchzogen, die nach § 10 zu konstruieren sind, und wir können uns jede Einheitsröhre durch ihre Achse als Einheitskraftlinie abgebildet denken. In diesen Einheitsröhren strömt nun die mathematische Flüssigkeit von den positiven Quellpunkten nach den negativen Sinkstellen beständig hinüber. Stellen wir jetzt kurze Zeit durch einen schlechten Leiter, z. B. einen Fischbeinstab, eine leitende Verbindung zwischen den Platten her, so nehmen die entgegengesetzten Ladungen in bequem meßbarer Zeit ab. Nach Entfernen der Verbindung würden wir bei Ausmessen des Feldes mit der Probekugel nur noch eine geringere Anzahl von Niveauflächen zwischen den Platten finden, die Potentialdifferenz zwischen den Platten ist geringer geworden. Entsprechend ist jetzt auch die Anzahl der Einheitskraftlinien geringer, diese selbst sind also weiter auseinander gerückt, Während der Dauer der leitenden Verbindung müssen sich also die Kraftlinien stetig ver-

schoben haben, und zwar in der Richtung senkrecht zu ihrer Längserstreckung. Wo sind nun die jetzt weniger vorhandenen Kraftlinien hingekommen? Eine genauere Verfolgung des Vorganges lehrt uns, daß die Kraftlinien, die bei dieser Bewegung an den Fischbeinstab herankommen, indem ihre Enden nach den Enden dieses Stabes auf den Metallflächen hingleiten, in diesen Stab hinein verschwinden und dort vernichtet werden müssen. Das Wandern der Kraftlinien, senkrecht zur eigenen Richtung, könnte uns also ein Bild der Änderung eines Feldes geben; allein, es wäre ein Irrtum, wenn wir meinten, wir würden durch diese Ausnützung des Bildes ein Analogon des physikalischen Vorganges erlangen können. In Wirklichkeit hat dieses Wandern der Linien mit unserem Bilde der Flüssigkeitsströmung nur einen rein äußerlichen Zusammenhang. Nach dem Bilde strömte die Flüssigkeit in den Röhren mit konstanter Geschwindigkeit; läßt die Stärke des Feldes nach, so wird die Geschwindigkeit geringer, bleibt aber in genau denselben Bahnen. Daß die Röhren in der Querrichtung sich zu verschieben scheinen, liegt nur an unserer willkürlichen Art, die Einheitsröhren zu konstruieren. Wir teilten nach § 10 die Niveauflächen derart in Felder, daß durch jedes Feld die Volumeneinheit der Flüssigkeit in der Zeiteinheit strömte. Wird daher die Geschwindigkeit geringer, so müssen wir eben die Feldereinteilung ausgedehnter wählen, und das W a n d e r n d e r L i n i e n i s t d a h e r n u r e i n V e r s c h i e b e n u n s e r e s E i n t e i l u n g s p r i n z i p s, und würde, wenn wir es als Grundlage der Weiterentwickelung wählten, die Bewegung der als Bild dienenden mathematischen Flüssigkeit vollständig verschleiern.

§ 59. Flüssigkeitsströmung und Verschiebung.

Kehren wir daher wieder zurück zu unserem Bilde des Strömens einer fingierten Flüssigkeit, so besteht die Änderung des Feldes darin, daß die Flüssigkeitsteilchen ihre Bahnen beibehalten und nur an Geschwindigkeit einbüßen. In diesem Verlust an Geschwindigkeit im dielektrischen Felde kann aber nun unmöglich allein die ganze eintretende Änderung bestehen, denn das elektrische Feld stellt einen bestimmten Betrag an Energie dar, und wenn das Feld nachläßt, so

verschwindet von dieser elektrischen Energie ein Teil. Für diesen verloren gehenden Teil muß irgendwo eine andere Energieform auftreten, und da lehren uns nun die im vorigen Kapitel beschriebenen Versuche, daß, wenn zwischen zwei ein Feld erzeugenden, elektrisierten Metallkörpern eine leitende Verbindung hergestellt wird, daß dann die elektrische Energie verschwindet und dafür in der leitenden Verbindung Wärme auftritt. Es wird daher unbedingt erforderlich bei der Betrachtung der Änderung eines elektrischen Feldes, die Vorgänge in den leitenden Körpern selbst, in den Metallen, zu berücksichtigen. Wir haben nun bereits an verschiedenen Stellen gesehen, daß die Zustände im Metall sich in unser bisheriges Bild aufnehmen ließen, wenn wir die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in demselben unendlich groß annehmen. Im Dielektrikum strömte die Flüssigkeit in den Kraftröhren mit einer bestimmten, als endlich angenommenen Geschwindigkeit; treffen dann die Stromlinien auf einen Metallkörper, so tauchen die Flüssigkeitsteilchen gewissermaßen in diesem unter, um sofort am anderen Ende desselben aus neuen Quellpunkten hervorzutreten. Wird daher das Feld ein anderes, so müßten wir jetzt uns auch vorstellen, daß die Schnelligkeit, mit der die Flüssigkeit den Metallkörper durchsetzt, eine andere wird; diese Geschwindigkeit soll aber an sich eine unendlich große sein, und es zeigt sich daher, daß unser Bild zum übersehen der Vorgänge im Metall, die nun in den Vordergrund treten, unzulänglich ist; denn mit Verhältnissen unendlicher Größen kann man keine Anschauung mehr verbinden. Wir müssen daher jetzt eine Erweiterung des Bildes versuchen.

Die Vorstellung der strömenden Flüssigkeit hatte lediglich den Zweck, uns eine leichtere Übersicht über die zu erwartende Verteilung der elektrischen Induktion zu verschaffen; nun ist aber ersichtlich, daß zur Erreichung dieses Zweckes durchaus nicht erforderlich ist, daß die Flüssigkeit dauernd strömend vorgestellt wird. Es genügt, sich zu denken, daß eine inkompressible Flüssigkeit überhaupt nur eine beliebig kurze Zeit geströmt hat, um genau dieselbe Übersicht zu erhalten. Wir denken uns daher jetzt das Strömen auf den ersten Moment der Existenz des Feldes beschränkt, dann sollen die Teilchen sofort wieder in Ruhe sein. Wir können dann die Geschwindig-

keit der Strömung dargestellt ansehen durch den Weg, den die Teilchen in diesem Moment zurückgelegt haben, oder durch die Verschiebung, die die Teilchen im Dielektrikum erfahren haben. So erhalten wir jetzt für die elektrische Induktion das Bild von aus ihrer Anfangslage verschobenen Teilchen, und der Widerstand gegen die Strömung kann angesehen werden als ein gewissermaßen elastischer Widerstand, der die Weiterbewegung des Teilchens hemmt. Während vordem in verschiedenen Dielektriken die Geschwindigkeiten verschieden waren, tritt jetzt die verschieden große Verschiebung an deren Stelle. Für die ursprüngliche Absicht der Einführung des Bildes war es einfacher und übersichtlicher, sich an die dauernde Strömung zu halten, für das folgende wird sich jedoch diese Änderung im Bilde als zweckmäßiger erweisen, ohne daß dadurch die Verwendbarkeit auch dieses Bildes für die Überlegungen des ersten Teiles unzulässig wird. Der im dritten Kapitel gewählten mathematischen Darstellung paßt sich sogar diese Form unseres Bildes besonders gut an, denn wir hatten dort bereits die elektrische Induktion als das Produkt aus der elektrischen Kraft und der Dielektrizitätskonstanten dargestellt, also ebenso, wie auch die Größe einer elastischen Deformation unter dem Einfluß einer Kraft sich darstellt, und hatten auch schon für die Induktion den Namen elektrische Verschiebung eingeführt.

Für die Vorgänge in den leitenden Körpern wird sich unser neues Bild aber folgendermaßen gestalten. Wenn ein

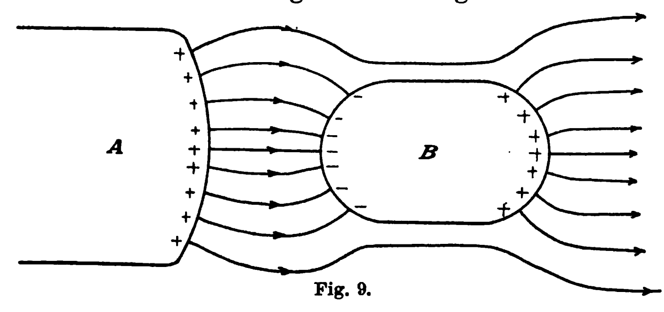


Fig. 9.

elektrisierter Körper *A* ein Feld erzeugt, in welchem sich der Metallkörper *B* befindet, so bewegt sich einen Moment lang die Flüssigkeit in der Richtung der Kraftlinien; die

Teilchen, die dabei die Oberfläche von B erreichen, treten hier ein, um sofort am anderen Ende wieder auszutreten, als wenn der Zwischenraum im Metallkörper dazwischen ausgeschaltet wäre. Da die Verschiebung nur einen Moment dauert, durchsetzt aber nur eine endliche Menge von Flüssigkeit das Metall, und die Menge dieser Flüssigkeit ist nach unserem Maßsystem gleich der Menge freier Elektrizität, einer Art, die auf der einen Seite des Körpers B auftritt.

Wird andererseits ein Feld durch zwei entgegengesetzt geladene Metallkörper A und B erzeugt, so erscheint die

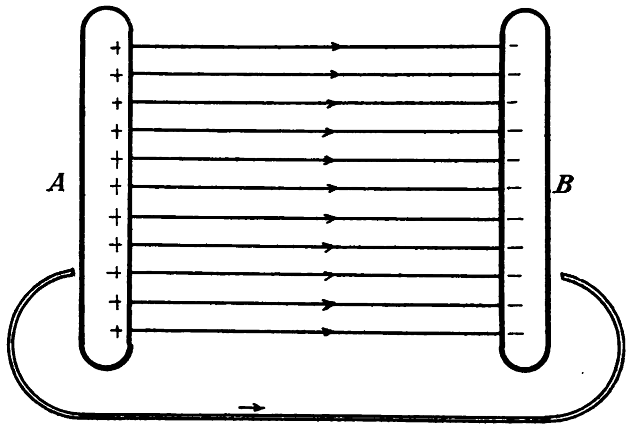


Fig. 10.

Flüssigkeit in der Richtung von A nach B gedrängt und in dieser Lage durch irgend einen Zwang im Dielektrikum festgehalten. Legen wir jetzt eine leitende Verbindung von A nach B, so geht die Verschiebung im Felde wieder zurück, also treten Flüssigkeitsteilchen wieder in die Quellpunkte auf A ein, schieben sich sofort durch den Leiter nach B hinüber, um hier aus den früheren Sinkstellen wieder hervorzutreten. Wir brauchen bei dieser Vorstellung nun gar nicht mehr darauf Wert zu legen, daß die Geschwindigkeit im Metall unendlich groß ist, daß also wirklich dieselben Teilchen, die in A eintreten, bei B wieder austreten, sondern das ganze Metall kann von dieser Flüssigkeit erfüllt sein, und die eintretenden Teilchen schieben die ganze Flüssigkeitsmenge vor sich her und drängen am anderen

Ende die gleiche Menge heraus. Der Vorgang des Ladungsausgleichs gleicht dann völlig dem Strom einer inkompressiblen Flüssigkeit und die Menge Flüssigkeit, die jeden Querschnitt der Leitungsbahn passiert, ist gleich der Menge der Elektrizität einer Art, die an der Grenze des Feldes verschwindet. Auch diese Erweiterung unseres Bildes ändert an der Zulässigkeit der früheren Herleitungen nichts, und wir haben jetzt erreicht, daß wir auch mit den Vorgängen in den Metallen mathematisch anschauliche Vorstellungen verbinden können.

§ 60. Ableitung des Ohmschen Gesetzes aus dem Bilde.

Der Vergleich der im § 56 beschriebenen Vorgänge bei der elektrischen Entladung mit der zuletzt dargestellten Vorstellung von einer strömenden Flüssigkeit in den Leitern zeigt nun leicht, daß diese Vorstellung eine zulässige ist, denn es lassen sich in der Tat ganz analoge Erscheinungen mit wirklichen Flüssigkeitsströmen nachmachen, und dadurch wird es dann leicht, auch für die elektrischen Vorgänge den mathematischen Ausdruck zu finden. Lassen wir zwei mit Wasser gefüllte Gefäße durch eine Röhre kommunizieren und stellen durch irgend welche künstlichen Mittel eine Niveaudifferenz zwischen den Wasserständen in den Gefäßen her, so wird das Wasser von dem höheren Niveau nach dem niederen durch die Röhre strömen und die Niveaudifferenz ausgleichen. Genau diesem Wasserstrom ist jetzt nach unserem Bilde der Elektrizitätsausgleich zwischen geladenen Körpern durch eine Drahtleitung analog. Der Niveaudifferenz entspricht die Potentialdifferenz der geladenen Körper und der durch jeden Querschnitt des Leitungsrohres strömenden Wassermenge entspricht genau die Menge unserer mathematischen Flüssigkeit, und diese ist, wie wir sahen, stets gleich der auf einem Leiter verschwindenden Menge freier Elektrizität. Wir könnten hiernach, zur Erleichterung der Vorstellung, die Flüssigkeit selbst mit der Elektrizität identifizieren und letztere als ein Fluidum von der Beschaffenheit unserer mathematischen Flüssigkeit ansehen, doch ist dabei nie zu vergessen, daß man es hier nicht mit einer physikalischen Erklärung zu tun hat, sondern daß das Bild

nur dienen soll zur Erleichterung der mathematischen Behandlung in dem Sinne, daß die aus ihm heraus leicht anschaulich zu gewinnenden mathematischen Beziehungen stets genau dieselben sind, die auch bei den elektrischen Vorgängen erfahrungsmäßig auftreten.

Setzt man noch auf die, die Wassergefäße verbindende Rohrleitung an verschiedenen Stellen vertikale Steigrohre, so kann man in diesen die an diesen Stellen während des Fließens des Wassers herrschenden Drucke beobachten und

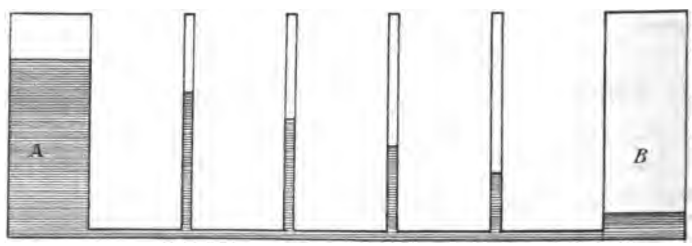


Fig. 11.

erhält ein Bild wie die Figur 11, und dieses entspricht wieder völlig dem im § 56 beschriebenen Versuche, in welchem an die, die Elektroskope verbindende Schnur Papierfähnchen angebracht sind. Die Druckdifferenzen an den Enden gleich langer Abschnitte der Rohrleitung, sind stets die gleichen und den Längen der Abschnitte proportional. Setzt man jedoch die Rohrleitung aus gleich langen Abschnitten, aber von ungleichem Querschnitt zusammen, so wird die Druckdifferenz an den Enden der Abschnitte stets den Querschnitten umgekehrt proportional sein. Es fließt auch jetzt in den weiteren Teilen durch jeden Querschnitt in jedem Augenblick die gleiche Wassermenge wie in den engen Teilen, aber die Geschwindigkeit ist geringer und in demselben Maße auch die Druckdifferenz an den Enden. Wir nehmen die Rohrleitung stets so lang und eng an, daß nach dem Ausgleich der Niveaudifferenz sofort die Bewegung zur Ruhe kommt und eine schwingende Bewegung der Wassermasse nicht eintritt. Die zu Beginn vorhandene, in der Existenz der Niveaudifferenz bestehende mechanische Energie hat sich dann durch die Strömung gerade vollständig verzehrt und auch an ihrer Stelle ist infolge der Reibung in

der Rohrleitung Wärme getreten. Die in jedem Abschnitt verbrauchte mechanische Energie ist gleich der den Querschnitt durchströmenden Wassermenge, multipliziert mit der Druckdifferenz an den Enden des Abschnittes, denn es tritt diese Wassermenge an dem einen Ende gewissermaßen im höheren Niveau ein, um am anderen Ende mit geringerem Niveau auszutreten; diese Wassermenge scheint also um die Höhe der Niveaudifferenz gesunken zu sein. Da wir nun erwarten müssen, daß die Wärmeentwickelung in jedem Abschnitt der Leitung genau der dort verschwindenden mechanischen Energie entspricht, so zeigt sich die Verteilung der Wärmeentwickelung in der Rohrleitung genau von der gleichen Art, wie die von Rieß beobachtete bei der Entladung von Leydener Batterien durch Drahtleitungen. Auch die Verschiedenheit der Metalle gegenüber der Entladung würden wir mit dem Wasserstrom nachmachen können, wenn wir die Rohrleitung mit einer schwammigen Substanz ausfüllen und die Größe der Poren in verschiedenen Abschnitten ungleich groß nehmen. Die Analogie der Entladungsvorgänge mit der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit ist demnach, soweit die bisherigen Versuche reichen, eine vollständige und wir werden daher jetzt, unter der Stärke oder Intensität des elektrischen Stromes die den Querschnitt der Leitung in der Zeiteinheit durchfließende Menge unserer mathematischen Flüssigkeit verstehen, unter der Voraussetzung, daß die Strömung so lange unverändert besteht, und haben als Maß für diese Menge die in der gleichen Zeit auf einem der Leiter verschwindende Menge freier Elektrizität. Bezeichnen wir die Stromstärke mit J und die Länge eines Abschnittes der Leitung mit l, den Querschnitt mit q und bezeichnen noch mit λ den Faktor, der der spezifischen Verschiedenheit der Metalle gegeneinander Rechnung trägt und den wir das spezifische Leitvermögen der Metalle nennen wollen, so haben wir jetzt zu setzen $J = \frac{(V_1 - V_2) q \lambda}{l}$, wo noch V_1 und V_2 die Potentiale an den Enden des Abschnittes sind. Die Größe $\frac{l}{q\lambda} = W$ nennt man auch den Leitungswiderstand des Drahtstückes und wir haben $J = \frac{V_1 - V_2}{W}$.

In dieser Gleichung ist das Ohmsche Gesetz ausgesprochen, das die Grundlage der Gesetze der strömenden Elektrizität bildet; wir haben dasselbe erhalten durch den Vergleich mit dem hydrodynamischen Bilde und die Berechtigung dazu aus den Versuchen über die Entladung von Leydener Batterien entnommen. Die genauere Prüfung dieses Gesetzes in der Erfahrung wird erst möglich, wenn wir länger dauernde elektrische Ströme, Ströme in stationärem Zustande, kennen gelernt haben.

Elftes Kapitel.

Stationäre elektrische Ströme.

§ 61. Erzeugung stationärer Ströme.

Die bisher besprochenen Bedingungen, unter denen elektrische Ströme auftreten, sind stets von der Art, daß die Ströme nur sehr kurze Zeit andauern können, da dann gleich wieder das elektrische Gleichgewicht hergestellt ist. Wir sind nun zwar auch in der Lage, diese Ströme zu gleichmäßig andauernden, stationären Strömen experimentell zu gestalten, indem wir in dem Maße, wie die Elektrizität sich zwischen den beiden Leitern durch die leitende Verbindung ausgleicht, den Leitern selbst neue Elektrizität zuführen, z. B. dadurch, daß wir kontinuierlich durch eine Reibungselektrisiermaschine oder eine auf Influenzwirkung beruhende Maschine stets neue Elektrizität erzeugen. Wenn es auch in der Tat leicht gelingt, dadurch einen stationären elektrischen Strom zu erzeugen, so ist dieser doch nur außerordentlich schwach, da derartige Maschinen nur außerordentlich geringe Elektrizitätsmengen zu liefern vermögen. Bedeutung gewinnen die elektrischen Ströme erst dadurch, daß sich in der Natur Erscheinungen finden, durch welche sich fast beliebig große Elektrizitätsmengen aus anderen Energiequellen gewinnen lassen. Eine solche Erscheinung würde vorliegen, sobald wir beobachten, daß zwei Metallkörper durch irgend welche Ursachen beständig auf einer bestimmten Potentialdifferenz gehalten werden; in einer leitenden Verbindung zwischen den Metallkörpern müssen wir dann einen kontinuierlichen Strom erwarten, dessen Stärke abhängen würde von der Größe der Potentialdifferenz, auf welcher die noch unbekannte Ursache die Metalle zu erhalten

vermag. Ein derartiger Vorgang tritt nun in der Tat stets ein, wenn zwei verschiedene Metalle in dieselbe Flüssigkeit eingetaucht werden, sie zeigen dann stets, wie sich mit einem hinreichend empfindlichen Elektroskop leicht nachweisen läßt, eine Potentialdifferenz, und in einem die Metalle verbindenden Draht muß daher ein Strom fließen, in dem Maße, wie der Kontakt mit der Flüssigkeit die Potentialdifferenz dauernd aufrecht zu erhalten vermag. Da wir nach der bisher gebildeten Vorstellung von dem elektrischen Strome annehmen, daß in dem Prozeß des elektrischen Stromes eine Umwandlung elektrischer Energie in Wärme vor sich geht, müssen wir erwarten, daß an den Kontaktstellen zwischen den Metallen und der Flüssigkeit ein Verbrauch irgend welcher anderen Energie zur Erzeugung der elektrischen Energie zu beobachten sein muß. Dieser findet sich auch wirklich, indem hier ein dem elektrischen Strome genau äquivalenter chemischer Prozeß eintritt, dessen Einzelheiten in einem späteren Kapitel zu besprechen sein werden.

Die Kombination zweier Metalle mit einer Flüssigkeit heißt ein galvanisches Element; durch dieselben ist uns die Möglichkeit der Erzeugung lang dauernder und starker elektrischer Ströme gegeben.

§ 62. Das Ohmsche Gesetz.

Durch die Rießschen Versuche wurden wir zu der Auffassung geführt, daß die durch die elektrostatischen Mittel erzeugten elektrischen Ströme vollkommen vergleichbar sind dem Strömen einer inkompressiblen Flüssigkeit; machen wir jetzt die nächstliegende Annahme, daß das gleiche auch für die aus galvanischen Elementen erhaltenen Ströme gilt, so müssen wir zwischen der in jeder Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Drahtes strömenden Flüssigkeitsmenge und der Potentialdifferenz an den Enden Proportionalität annehmen. Erstere (die Stromstärke) sei mit i bezeichnet, letztere mit $V_A - V_B$, dann ist zu setzen $wi = V_A - V_B$, wo w zunächst einen Proportionalitätsfaktor bedeutet; oder $i = \frac{V_A - V_B}{w}$. Das Wesentliche für w ist, daß wir es als von dem Strom und der Potentialdifferenz gänzlich unabhängig annehmen, so daß seine

Größe nur durch die Eigenschaften des Leitungsdrahtes bestimmt ist. Wir nennen w den elektrischen Leitungswiderstand des Drahtes und haben in obiger Formel den mathematischen Ausdruck für das Ohmsche Gesetz. Die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes ist hiernach eine grundlegende Annahme für alle folgenden Ableitungen, und die Berechtigung derselben wird sich aus der Bestätigung der aus ihr herzuleitenden Folgerungen in der Erfahrung ergeben.

§ 63. Widerstand von parallel und hintereinander geschalteten Drähten.

Aus dem Ohmschen Gesetze folgen zunächst für die Widerstände von Drähten folgende Beziehungen. Sind eine Reihe verschiedener Drahtstücke hintereinander gefügt, so daß der gleiche Strom alle durchfließen muß, und erstreckt sich der erste Draht vom Punkte A_1 bis A_2, der zweite von A_2 bis A_3 u. s. w., so seien mit $V_1, V_2, V_3 \ldots$ die Potentiale in $A_1, A_2, A_3 \ldots$ bezeichnet und mit $w_{12}, w_{23} \ldots$ die Widerstände der Drähte. Dann ist

$$V_1 - V_2 = i w_{12}; \quad V_2 - V_3 = i w_{23}; \quad V_3 - V_4 = i w_{34}; \;\ldots.$$

folglich $\quad V_1 - V_4 = i\,(w_{12} + w_{23} + w_{34} + \ldots.)$

Das heißt:

Der Widerstand einer Reihe hintereinander geschalteter Drähte ist gleich der Summe der Widerstände der einzelnen Drähte.

Sind ferner zwischen zwei Punkten A und B eine Anzahl Drähte gleichzeitig nebeneinander ausgespannt, deren Einzelwiderstände w_1, w_2, w_3 u. s. w. sind, so ist:

$$V_A - V_B = i_1 w_1 = i_2 w_2 = i_3 w_3 = \ldots.. = I\,W,$$

wenn wir unter I den Gesamtstrom verstehen, der von A nach B fließt und unter W den Widerstand der Kombination der parallelen Drähte. Da dann

$$I = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots$$

ist, so folgt, daß

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \ldots$$

oder in Worten:

Bei parallel geschalteten Drähten ist der reziproke Wert des Gesamtwiderstandes gleich der Summe der reziproken Werte der Einzelwiderstände.

Für zwei parallel geschaltete Drähte läßt sich auch schreiben

$$W = \frac{w_1 \cdot w_2}{w_1 + w_2},$$

für drei Drähte

$$W = \frac{w_1 w_2 w_3}{w_1 w_2 + w_2 w_3},$$

für vier Drähte

$$W = \frac{w_1 w_2 w_3 w_4}{w_1 w_2 w_3 + w_2 w_3 w_4 + w_3 w_4 w_1}$$

und entsprechend für eine größere Anzahl von Drähten.

§ 64. Das spezifische Leitvermögen.

Aus diesen beiden, für die Widerstände hintereinander und parallel geschalteter Drahtkombinationen gefundenen Ausdrücken folgt unmittelbar, daß ein Draht von der n-fachen Länge eines anderen Drahtes auch den n-fachen Widerstand desselben hat; ist dagegen bei gleicher Länge der Querschnitt der n-fache, so ist der Widerstand $\frac{1}{n}$ desjenigen des einfachen Drahtes. Nennt man nun den reziproken Wert des Widerstandes eines Drahtes von der Länge Eins und dem Querschnitt Eins das spezifische Leitvermögen des betreffenden Materials und bezeichnet dasselbe mit λ, so muß hiernach ein Draht von der Länge s und dem Querschnitt q den Widerstand haben

$$w = \frac{s}{q\lambda}.$$

Für jeden Drahtabschnitt mit den Enden A_1 und A_2 muß dann das Ohmsche Gesetz gelten in der Form

$$i = \frac{V_1 - V_2}{s_{12}} q\lambda,$$

oder, wenn man zu einem unendlich kleinen Drahtabschnitt übergeht

$$i = \lambda \frac{\partial V}{\partial s} q.$$

§ 65. Strombahnen in einem ausgedehnten Metallkörper.

Ebenso, wie wir bereits ein System paralleler Drähte als gleichwertig ansahen mit einem einzigen Draht von einem Querschnitt, gleich der Summe der Querschnitte der einzelnen Drähte, gelangen wir jetzt auch zu der Vorstellung von dem Widerstande eines beliebig ausgedehnten, homogenen Metallkörpers gegenüber einer bestimmten Stromverteilung. Auch in diesem muß die elektrische Strömung analog der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit sein, das heißt aber, es muß jedenfalls eine solenoidale Stromverteilung vorhanden sein, und wir können den Körper längs der Stromröhren zerlegen und als Bündel paralleler Drähte auffassen und dadurch eine Vorstellung seines Widerstandes gewinnen; freilich setzt das voraus, daß zunächst die Stromverteilung bekannt ist. Stromverteilungen, die an verschiedenen Stellen in den Körper eintreten, werden im allgemeinen auch verschiedenen Widerstand finden. Werden zwei oder mehrere Stromverteilungen gleichzeitig in demselben veranlaßt, so müssen wir erwarten, daß sich dieselben wie Flüssigkeitsströmungen zusammensetzen, an jeder Stelle nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten. Folglich sind wir auch berechtigt, den an einer Stelle herrschenden Strom nach Komponenten parallel den Achsen eines Koordinatensystems zu zerlegen. Verstehen wir noch unter Stromdichte den durch die Flächeneinheit gehenden Strom, also die Größe $\frac{i}{q}$, so mögen mit u, v, w die Komponenten der Stromdichte bezeichnet werden. Es wird dann zu setzen sein

$$u = \lambda \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v = \lambda \frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = \lambda \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Ist dq irgend ein Flächenelement im Innern des Metalles und n seine Normale, so ist die Elektrizitätsmenge, die durch dies Element strömt, gleich

$$E = \lambda \frac{\partial V}{\partial n} dq.$$

Ist dq ein Element einer geschlossenen Fläche, die ganz im Innern des Metalles liegt, so muß die in die Fläche ein-

strömende Menge gleich der ausströmenden sein, da ja die strömende Substanz inkompressibel ist, es ist also das Integral

$$\lambda \int \frac{\partial V}{\partial n} dq = 0.$$

Dieses Oberflächenintegral läßt sich aber wieder in ein Raumintegral zerlegen, genau wie wir es im dritten Kapitel für die solenoidale Verteilung im elektrostatischen Felde kennen lernten. Es wird

$$\lambda \int \frac{\partial V}{\partial n} dq = \lambda \int \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) dv = 0.$$

Da dies für jeden geschlossenen Raum gelten muß, so wird

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die Divergenz des Vektors der Strömung im Innern von Metallen, die von Strömen durchflossen werden, ist also stets gleich Null; im Innern der Metalle können also auch in diesem Falle keine freien Elektrizitäten auftreten; diese sind vielmehr ganz auf die Oberfläche beschränkt. An der Oberfläche des Metalles, an den Stellen, wo die Ströme nicht ein- oder austreten, wo das Metall also an einen Nichtleiter grenzt, ist stets $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$; die Stromlinien müssen also der Oberfläche parallel laufen.

Wenn also die Aufgabe, die Stromlinien im Innern eines Leiters aus den Eintrittsstellen der Ströme zu bestimmen auch auf dieselben mathematischen Funktionen führt, wie diejenige, die Verteilung der elektrischen Kraft im elektrostatischen Felde zu finden, wenn die Elektrizitätsverteilung an den Grenzen gegeben ist, so unterscheidet sie sich von dieser dadurch, daß in letzterer die Potentiale überall an den Grenzen des Feldes bekannt sind, bei ersterer jedoch für einen großen Teil der Oberfläche nur die Bedingung $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ gegeben ist.

§ 66. Kirchhoffs Sätze.

Besonders einfach gestaltet sich die Berechnung der Stromverteilung, wenn ein System beliebig untereinander

verbundener linearer Leiter gegeben ist. In diesem Falle läßt sich, wie Kirchhoff gezeigt hat, die Aufgabe stets lösen, wenn man von zwei nach ihm genannten Sätzen ausgeht. Der erste Kirchhoffsche Satz spricht das Kontinuitätsgesetz aus, d. h. die Tatsache, daß im stationären Zustande keine Elektrizitätsanhäufungen an irgend einer Stelle eintreten. Treffen demnach in einem Punkte n-Drähte zusammen, so muß die Summe der in diesen Drähten zu dem Punkte hinfließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme sein. Rechnen wir die letzteren negativ, so spricht sich der erste Kirchhoffsche Satz aus in der Gleichung $\Sigma i_n = 0$.

Um den zweiten Satz gleich in voller Allgemeinheit formulieren zu können, nehmen wir an, daß in die die Kreuzungspunkte verbindenden Leitungsbahnen noch Abschnitte eingeschaltet sein können, in denen Kräfte wirken, die an den Enden dieses Abschnittes eine konstante Potentialdifferenz hervorrufen. Derartige Abschnitte können galvanische Elemente sein, aber auch beliebige andere Abschnitte mit elektromotorischen Kräften, wie wir sie später noch kennen lernen. Die durch diese Potentialdifferenz veranlaßten Ströme werden sich dann über die von außen dieser Leitungsbahn zugeführten Ströme einfach überlagern; wenn daher w der Widerstand eines Abschnittes einer solchen Leitungsbahn ist, i der dieselbe durchfließende Gesamtstrom, $V_1 - V_2$ die Potentialdifferenz an den Enden der Bahn und e die durch die besondere an einer oder mehreren Stellen wirkende elektromotorische Kraft hervorgerufene Potentialdifferenz, die wir positiv rechnen, wenn sie dem Strom i gleich gerichtet ist, so wird nach dem Ohmschen Gesetze jetzt sein

$$iw = V_1 - V_2 + e.$$

Wir betrachten jetzt in dem zu untersuchenden System linearer Leiter ein in sich geschlossenes Polygon, dessen Seiten, wenn wir das Polygon in einem Sinne umkreisen, der Reihe nach die Widerstände w_1, w_2, w_3 u. s. w. haben. In denselben mögen die Ströme fließen i_1, i_2, i_3 . . ., wobei dem i jedesmal ein negatives Vorzeichen zu geben ist, wenn der Strom der Umkreisungsrichung entgegengesetzt ist und entsprechend seien e_1, e_2, e_3 die elektromotorischen Kräfte. Schließlich seien $V_1, V_2, V_3 \ldots$ die Potentiale jedesmal in den

Anfangspunkten der gleich bezeichneten Drähte; dann gelten die Gleichungen:

$$i_1 w_1 = V_1 - V_2 + e_1$$
$$i_2 w_2 = V_2 - V_3 + e_2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$i_n w_n = V_n - V_1 + e_n.$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man das zweite Kirchhoffsche Gesetz in der Form $\sum\limits_n iw = \Sigma e$.

Bei der Umkreisung eines geschlossenen Polygons ist die Summe der Produkte aus der Stromstärke und Widerständen gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte.

Kirchhoff*) hat jetzt ganz allgemein bewiesen, daß diese beiden Sätze ausreichen, um für ein System von n-Drähten, die in beliebiger Weise untereinander verbunden sind, und in denen noch elektromotorische Kräfte eingeschaltet sein können, jederzeit die Stromverteilung vollständig zu finden. Das Resultat läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Es sei m die Anzahl der vorhandenen Kreuzungspunkte der Drähte und es sei $\mu = n - m + 1$, dann ist

der gemeinschaftliche Nenner aller Stromstärken i die Summe derjenigen Kombinationen von $w_1, w_2, .. w_n$ zu je μ-Elementen $w_{k_1}, w_{k_2} \ldots . k_{k_\mu}$, welche die Eigenschaft haben, daß nach Fortnahme der Drähte $k_1, k_2 .. k_\mu$ keine geschlossene Figur übrig bleibt,

und es ist der Zähler von i_λ die Summe derjenigen Kombinationen von $w_1, w_2 .. w_n$ zu je $\mu-1$ Elementen $w_{k_1}, w_{k_2} \ldots w_{k_{\mu-1}}$, welche die Eigenschaft haben, daß nach Fortnahme von $k_1, k_2 \ldots k_{\mu-1}$ eine geschlossene Figur übrig bleibt, und daß in dieser der Draht λ vorkommt; eine jede Kombination multipliziert mit der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche sich auf der zugehörigen geschlossenen Figur befinden.

Da der vollständige Beweis hierfür sehr weitläufig ist und es überdies in der Anwendung auf einfachere Fälle,

*) Pogg. Annal., Bd. 72, 1847. Gesammelt. Abh., S. 22.

wie sie in der Praxis vorkommen, meist einfacher ist, nicht diese fertige Entwickelung zu benutzen, sondern von den beiden Kirchhoffschen Sätzen aufs neue auszugehen, so soll hier auf den allgemeinen Beweis verzichtet werden, und nur seine Richtigkeit an einem Beispiel erläutert werden.

§ 67. Einfache Wheatstonesche Brücke.

Es seien vier Punkte untereinander paarweise durch im ganzen 6 Drähte verbunden, in denen die Ströme $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$ in der Verteilung, wie die Figur zeigt, fließen. Die zugehörigen Widerstände und elektromotorischen Kräfte seien

$w_1, w_2, \ldots w_6$ und $e_1, e_2, \ldots e_6$.

Um über die Vorzeichen Klarheit zu haben, seien die Stromrichtungen entsprechend den in der Figur 12 beigefügten Pfeilen.

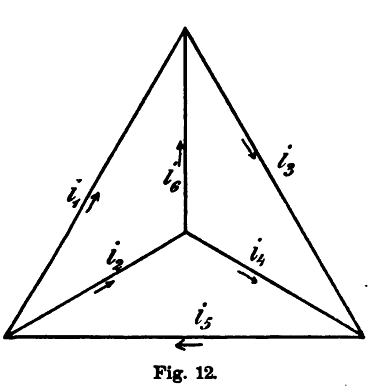


Fig. 12.

Der erste Kirchhoffsche Satz gibt uns dann die Gleichungen

$$-i_1 - i_2 + i_5 = 0,$$
$$+i_1 - i_3 + i_6 = 0,$$
$$+i_3 + i_4 - i_5 = 0.$$

Derselbe Satz ergibt auch noch für den mittleren Punkt eine analoge Gleichung, dieselbe ist aber nicht unabhängig von den ersten drei Gleichungen, da sie auch durch Addition derselben erhalten wird.

Der zweite Kirchhoffsche Satz, auf die drei kleineren Dreiecke angewandt, ergibt die Gleichungen:

$$i_1 w_1 - i_2 w_2 - i_6 w_6 = e_1 - e_2 - e_6,$$
$$i_3 w_3 - i_4 w_4 + i_6 w_6 = e_3 - e_4 + e_6,$$
$$i_2 w_2 + i_4 w_4 + i_5 w_5 = e_2 + e_4 + e_5.$$

Durch Summation erhalten wir wieder die vierte Gleichung, die dem großen Dreieck entspricht. Wir haben also

im ganzen 6 voneinander unabhängige Gleichungen für die 6 Unbekannten $i_1, i_2 \ldots . i_6$, sind also im stande, die Stromstärken vollständig zu berechnen. Führen wir dies mit Hilfe der Determinantenrechnung aus (vergl. O. Pund, Algebra, diese Samml. Band VI S. 152), so erhalten wir unmittelbar eine Bestätigung der Kirchhoffschen allgemeinen Lösung.

Der für die Anwendung wichtigste Fall ist nun derjenige, wo alle e bis auf eins, etwa e_5 verschwinden, und es gilt dann, die Bedingung aufzusuchen, unter welcher in dem gegenüberliegenden Zweig die Stromstärke i_6 gleich Null wird. Es wird dann aus unserm Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
-i_1 - i_2 + i_5 &= 0,\\
i_1 &= i_3,\\
i_3 + i_4 - i_5 &= 0,\\
i_1 w_1 - i_2 w_2 &= 0,\\
i_3 w_3 - i_4 w_4 &= 0,\\
i_2 w_2 + i_4 w_4 + i_5 w_5 &= e_5.
\end{aligned}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt:

$$i_1 + i_2 = i_3 + i_4,$$

unter Berücksichtigung der zweiten folgt daher auch $i_2 = i_4$, die vierte und fünfte ergeben

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{w_1}{w_2}; \quad \frac{i_4}{i_3} = \frac{w_3}{w_4}.$$

Da aber nach dem eben gefundenen $\frac{i_2}{i_1} = \frac{i_4}{i_3}$ ist, so ist die Bedingung dafür, daß $i_6 = 0$ ist, gegeben durch

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4} \text{ oder } w_1 w_4 = w_2 w_3,$$

ganz unabhängig von der Größe der elektromotorischen Kraft e_5 und der Stärke der Ströme. Diese Drahtkombination nennt man die Wheatstonesche Brücke; sie findet besonders Anwendung, um einen unbekannten Widerstand w_1 mit einem bekannten w_2 zu vergleichen, wenn noch das Verhältnis zweier Widerstände $\frac{w_3}{w_4}$ gegeben ist. Letzeres erhält man am einfachsten, wenn man w_3 und w_4 zusammen

aus einem homogenen Draht bildet, auf dem der Trennungspunkt durch einen Gleitkontakt gegeben ist. Das Verhältnis $\frac{w_3}{w_4}$ ist dann gleich dem Verhältnis der abgegrenzten Drahtleitungen.

Für die Stromstärken finden wir noch durch eine einfache Rechnung zunächst

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{i_3}{i_4} = \frac{w_2 + w_4}{w_1 + w_3},$$

und wenn wir zur Abkürzung schreiben

$$N = w_5 (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + (w_1 + w_3)(w_2 + w_4),$$

so wird

$$i_1 = i_3 = \frac{e_5 (w_2 + w_4)}{N},$$

$$i_2 = i_4 = \frac{e_5 (w_1 + w_3)}{N},$$

$$i_5 = \frac{e_5 (w_1 + w_2 + w_3 + w_4)}{N}.$$

Da aus der Beziehung $\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4}$ auch folgt $\frac{w_1}{w_3} = \frac{w_2}{w_4}$, so ergibt die Symmetrie der Verhältnisse, daß wir auch in e_6 eine elektromotorische Kraft hätten annehmen können und die Bedingung für das Verschwinden von e_5 aufsuchen, und wären dann auf genau das gleiche Widerstandsverhältnis geführt.

§ 68. Allgemeine Wheatstonesche Brücke.

Eine Erweiterung der Wheatstoneschen Brücke erhalten wir, wenn in allen Drahtzweigen elektromotorische Kräfte vorhanden sind; es gilt dann die Bedingung dafür anzugeben, daß beim Herausnehmen oder Einfügen des Zweiges 6 die Stromstärke in dem gegenüberliegenden Zweig i_5 nicht geändert wird. Bezeichnen wir mit den einfachen Buchstaben die Stromstärke bei Unterbrechung des Zweiges 6 und mit gestrichenen Buchstaben die Stromstärken nach Anlegen desselben, so können

wir nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz die Gleichungen schreiben:

$$\begin{aligned} e_1 + e_3 + e_5 &= i_1 w_1 + i_3 w_3 + i_5 w_5 \\ e_1 + e_3 + e_5 &= i_1' w_1 + i_3' w_3 + i_5 w_5 \\ e_2 + e_4 + e_5 &= i_2 w_2 + i_4 w_4 + i_5 w_5 \\ e_2 + e_4 + e_5 &= i_2' w_2 + i_4' w_4 + i_5 w_5 . \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden folgt

$$\frac{i_1' - i_1}{i_3' - i_3} = \frac{w_3}{w_1},$$

aus den letzten beiden

$$\frac{i_2' - i_2}{i_4' - i_4} = \frac{w_4}{w_2}.$$

Nach dem ersten Kirchhoffschen Gesetz ist aber

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 &= i_5 = i_1' + i_2', \\ i_3 + i_4 &= i_5 = i_3' + i_4, \end{aligned}$$

folglich

$$i_1' - i_1 = -(i_2' - i_2) \text{ und } i_3' - i_3 = -(i_4' - i_4);$$

es ist also auch in diesem Falle

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4},$$

oder allgemein: Die Bedingung dafür, daß in der Wheatstoneschen Drahtkombination beim Schließen und Unterbrechen des Zweiges 6 im gegenüberliegenden Zweig 5 die Stromstärke nicht geändert wird, lautet $w_1 w_4 = w_2 w_3$.

In dieser Verallgemeinerung dient diese Brückenschaltung auch zum Bestimmen des Widerstandes von Leitungsbahnen, in denen elektromotorische Kräfte herrschen, also z. B. des Widerstandes von Elementen.

§ 69. Thomsons Doppelbrücke.

Legen wir in der einfachen Wheatstoneschen Drahtanordnung zwischen einen Punkt von 2 und einen von 4 noch eine Verbindung, Fig. 13, so daß die Drähte 2 und 4 in die

Abschnitte zerfallen 2′ und 2″, bezw. 4′ und 4″, so kann ebenfalls die Bedingung dafür gesucht werden, daß in 6 kein Strom fließt. Wir haben dann die Gleichungen

$$i_1 = i_3; \quad i_2'' = i_4''; \quad i_2' = i_2'' + i;$$
$$i_4' = i_4'' + i,$$

also auch

$$i_2' = i_4',$$

ferner

$$i_1 w_1 - i_2'' w_2'' - i_2' w_2' = 0;$$
$$i_3 w_3 - i_4'' w_4'' - i_4' w_4' = 0,$$

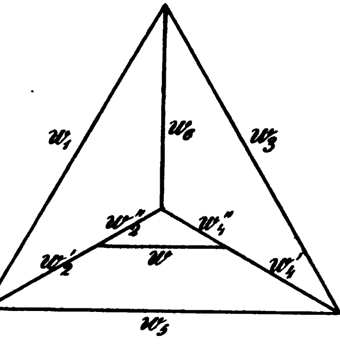


Fig. 13.

folglich auch unter Berücksichtigung des vorigen

$$i_3 w_1 - i_4'' w_2'' - i_4' w_2' = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen enthalten jetzt aber dieselben Unbekannten i_3, i_4'', i_4', aber ungleiche Koeffizienten, können daher nur dann gleichzeitig nebeneinander bestehen, wenn zwischen den Koeffizienten gleichzeitig die Proportionen bestehen

$$\frac{w_1}{w_3} = \frac{w_2''}{w_4''} = \frac{w_2'}{w_4'}.$$

Hierdurch gestattet diese unter dem Namen Thomsons Doppelbrücke bekannte Schaltung, die Widerstände w_2' und w_4' zu vergleichen durch die beiden einander gleichen Verhältnisse

$$\frac{w_1}{w_3} = \frac{w_2''}{w_4''}.$$

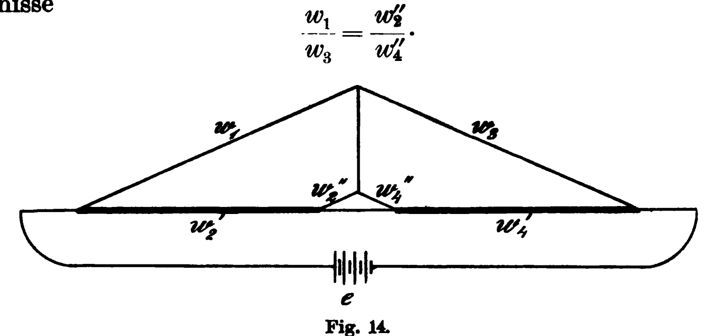


Fig. 14.

Der Vorzug dieser Schaltung geht aus der durch die Figur 14 gegebenen Darstellung hervor; es können die geringen Wider-

stände dicker Leiterstücke verglichen werden, ohne daß, wenn w_1, w_2'', w_3, w_4'' größere Widerstände sind, die Übergangswiderstände der Verbindungen von den dicken Drähten zu den dünnen ungünstig auf die Messung wirken, da dieselben stets auf der Seite der größeren Widerstände sich anfügen.

§ 70. Stromverzweigungen, Shunts.

Die Berechnung der Stromverteileilung in mehreren, zwischen zwei Punkten parallel eingeschalteten Leitungsdrähten ergibt sich ebenfalls aus den Kirchhoffschen Sätzen. Befindet sich in dem Zweige mit dem Widerstand w die elektromotorische Kraft e und der Strom i und zwischen den Punkten A und B (Fig. 15) n-Verbindungen mit den Widerständen $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$ und den Strömen $i_1, i_2, i_3, i_r \dots i_n$, so ergibt das erste Kirchhoffsche Gesetz auf A angewandt

$$i = \Sigma i_r,$$

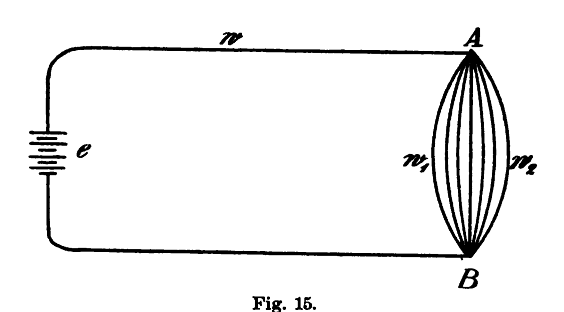


Fig. 15.

das zweite Gesetz, angewandt auf den Zweig w, vereint mit einem Zweig w_r

$$e = iw + i_r w_r,$$

oder

$$i_r = \frac{e - iw}{w_r}.$$

Im ganzen werden r derartige Gleichungen erhalten; addiert man diese alle, so erhält man

$$\sum i_r = i = (e - iw) \sum \frac{1}{w_r}$$

und hieraus

$$i = \frac{e}{w + \frac{1}{\sum \frac{1}{w_r}}}.$$

Nach § 62 können wir $\sum \frac{1}{w_r} = \frac{1}{W}$ setzen und unter W den Gesamtwiderstand der parallelgeschalteten Drähte verstehen, dann ist $i = \frac{e}{w + W}$, wie auch aus dem Ohmschen Gesetz unmittelbar zu erwarten war.

Die Stromstärke in den einzelnen Zweigen ist

$$i_r = \frac{e - iw}{w_r} = \frac{iW}{w_r} = \frac{1}{w_r} \cdot \frac{i}{\sum \frac{1}{w_r}}.$$

Die Stromstärken verhalten sich also stets umgekehrt wie die zugehörigen Widerstände, wie sich aus dem Ohmschen Gesetze unmittelbar hätte herleiten lassen.

Praktisch besonders wichtig wird der Fall, daß nur zwei Zweige w_1 und w_2 vorhanden sind. Es wird dann

$$W = \frac{1}{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2}} = \frac{w_1 w_2}{w_1 + w_2},$$

und es ist in dem einen Zweige der Strom

$$i_1 = i \frac{w_2}{w_1 + w_2}.$$

Soll dieser Strom, ein bestimmter Bruchteil, $\frac{1}{n}$, des Gesamtstromes i sein, so haben wir die Bedingung

$$\frac{w_2}{w_1 + w_2} = \frac{1}{n}, \text{ also } w_2 = \frac{1}{n-1} w_1.$$

Für $n = 10, 100, 1000$ muß daher w_2 gleich $\frac{1}{9}, \frac{1}{99}, \frac{1}{999}$ von w_1 gewählt werden. In dieser Form werden derartige Verzweigungen sehr häufig benutzt, um mit Meßgeräten, die selbst nur schwache Ströme zu messen gestatten, Ströme

von der 10, 100, 1000 fachen Stärke messen zu können; w_2 ist dann der Widerstand des Meßgerätes und w_1 derjenige des sogenannten Nebenschlusses oder Shunts.

Ist ein Meßgerät vom Widerstande w_m dauernd mit einem Nebenschlußwiderstand w verbunden, so daß bei der

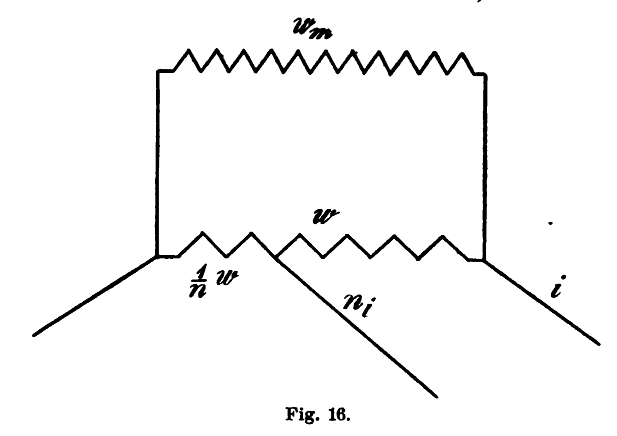


Fig. 16.

größten Empfindlichkeit nur der Strom $i_m = i \cdot \frac{w}{w_m + w}$ durch das Instrument fließt, so kann man mit dem Instrument die n-fachen Ströme messen, wenn man die Stromableitung an einem Punkte von w anbringt, der um $\frac{1}{n} w$ von der Zuführungsstelle entfernt ist, denn dann ist

$$i'_m = i \frac{\frac{1}{n} w}{w_m + w} = \frac{1}{n} i_m,$$

wenn also der Gesamtstrom i im zweiten Fall das n-fache von dem i im ersten Falle ist, so zeigt das Meßgerät gleiche Ausschläge.

Die zweite Anordnung empfiehlt sich in den Fällen, wo es darauf ankommt, daß der geschlossene Drahtkreis, in welchem das Meßgerät liegt, stets den gleichen Gesamtwiderstand hat, sowie auch, wenn es besonders darauf ankommt, daß beim Übergang von einer Verzweigung zur anderen stets sehr genau das richtige Verhältnis innegehalten wird und Temperatureinflüsse weniger stören sollen.

§ 71. Energie des elektrischen Stromes, Joulesches Gesetz.

Nach den Rießschen Versuchen hatten wir den Vorgang des elektrischen Stromes angesehen als den Übergang der elektrischen Energie in Wärmeenergie; wenn die jetzt behandelten stationären elektrischen Ströme gleiche Prozesse sein sollen, so muß sich ebenfalls eine Beziehung aufstellen lassen, welche die im Strome verschwindende elektrische Energie gleich setzt einer oder verschiedener anderer Energieformen, die an deren Stelle erscheinen. Fließt aber ein stationärer Strom zwischen den Punkten A und B mit den Potentialen V_A und V_B, so heißt das, die Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit vom Potential V_A nach V_B übergeht, ist dargestellt durch eine konstante Größe, die wir die Stromstärke nannten und mit i bezeichneten (vergl. § 62). Der Verlust an elektrischer Energie in der Zeiteinheit ist also stets gleich $T = (V_A - V_B)\,i$, für diese Energiemenge muß eine andere Energieform auftreten.

Nach dem Ohmschen Gesetz ist aber, wenn wieder w der Widerstand der Leistungsbahn ist und e noch eine auf der Strecke AB etwa vorhandene elektromotorische Kraft:

$$V_A - V_B = wi - e,$$

folglich ist

$$T = (V_A - V_B)\,i = wi^2 - ei.$$

Die im Strome verfügbar werdende Energie besteht also aus zwei Teilen. Der erste wi^2 hängt nur von dem Leitungswiderstand und der Stromstärke ab und ist immer positiv; er ist also eine stets auftretende Leistung jedes elektrischen Stromes in irgend einem Leiter und äußert sich in der Erwärmung des Leiters. Die in einem Leiter frei werdende Wärmemenge ist stets äquivalent mit wi^2; dies ist das Joulesche Gesetz, das von Joule zuerst experimentell gefunden wurde und von ihm selbst und später wiederholt auf das genaueste durch zahlreiche Versuche bestätigt wurde.

Der zweite Teil der im Strome verfügbaren Energie, der Teil ei tritt nur auf, wenn in der Strombahn eine elektromotorische Kraft vorhanden ist; er ist positiv, wenn die Stromrichtung und die Richtung der elektromotorischen

Kraft einander entgegengesetzt sind. Wir können daher auch sagen, ein Strom kann nur dann außer der Jouleschen Wärme noch irgend eine andere Leistung, mechanische Arbeit, chemische Wirkung, oder noch weitere Wärmeentwicklung hervorrufen, wenn in seiner Bahn noch eine der Stromrichtung entgegengesetzte elektromotorische Kraft vorhanden ist.

Wenn dagegen in der Strombahn sich eine dem Strome gleichgerichtete elektromotorische Kraft befindet, so wird diese die elektrische Energie vermehren, also muß an dieser Stelle ein Verbrauch anderer Energie nachzuweisen sein, etwa Verbrauch chemischer Energie durch Entstehen chemischer Verbindung, oder ein Verschwinden von Wärmeenergie in Gestalt von Abkühlung, oder ein Aufwand mechanischer Arbeit gegen die Kräfte des Stromes.

§ 72. Maße für strömende Elektrizität; Ampere, Volt, Ohm, Watt.

Bevor die vorgetragene Theorie mit der Erfahrung verglichen werden kann, ist jetzt noch erforderlich, daß die Maße festgesetzt werden, nach denen die in Frage kommenden Größen zu messen sind. Die elektrostatischen Einheiten wurden im vierten Kapitel abgeleitet und insbesondere ihre Dimensionen im absoluten Maßsystem im § 31 entwickelt. Die Einheit des Potentials, bezw. der Potentialdifferenz, kann ohne weiteres auch für die strömende Elektrizität verwendet werden; die Dimension derselben ist nach § 31 $\left[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} k^{-\frac{1}{2}}\right]$. Für die Stromstärke ist die nächstliegende Festsetzung die, daß man denjenigen Strom als Einheit der Stromstärke annimmt, bei welchem in der Zeiteinheit die Elektrizitätsmenge Eins durch den Querschnitt des Leiters fließt. Da die Einheit der wahren Elektrizitätsmenge, die hierfür allein in Frage kommt, die Dimension $\left[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} k^{\frac{1}{2}}\right]$ hat, so erhält die Stromstärke im elektrostatischen Maßsystem die Dimension $\left[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} k^{\frac{1}{2}}\right]$. Für die Einheit des Widerstandes müssen wir dann denjenigen Widerstand setzen, in welchem die Einheit

der Potentialdifferenz den Strom Eins erzeugt. Als Dimension für den Widerstand finden wir daher

$$\frac{\left[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} k^{-\frac{1}{2}}\right]}{\left[M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} k^{+\frac{1}{2}}\right]} = [L^{-1} T k^{-1}].$$

Abgesehen von der Konstanten k erhält also der Widerstand die Dimension einer reziproken Geschwindigkeit. Diese Vergleichbarkeit des Widerstandes mit einer Geschwindigkeit wird später bei Besprechung der elektromagnetischen Beziehungen noch eine nähere Erläuterung erfahren. Dividieren wir noch die Stromstärke durch den Querschnitt der Leitungsbahn, so erhalten wir die Stromdichte und für dieselbe die Dimension

$$\left[M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2} k^{\frac{1}{2}}\right].$$

Aus diesen Dimensionsformeln läßt sich ersehen, daß in der Tat das Produkt aus einer Potentialdifferenz und einer Stromstärke ebenso wie das Produkt aus einem Widerstand und dem Quadrate der Stromstärke die Dimension haben $[M L^2 T^{-3}]$, d. h. äquivalent sind dem Produkt aus einer Masse mal dem Quadrat einer Geschwindigkeit, dividiert durch die Zeit. Multiplizieren wir noch die Produkte wi^2 oder ei mit der Zeit, so erhalten wir eine Größe von der Dimension einer Arbeit, wie es auch die Entwickelungen des vorigen Paragraphen verlangen.

Legt man bei den Messungen jetzt als Grundeinheiten Centimeter, Gramm und Sekunde fest, wie es allgemein üblich ist, so erhält man bei der Einführung des abgeleiteten Maßsystems in den praktisch vorkommenden Fällen meist unbequem große Zahlenwerte, besonders für die angewendeten Ströme und Widerstände, es ist deswegen durch den internationalen Kongreß 1893 in Chicago festgesetzt, daß in der Praxis angewendet werden soll

als Einheit der Stromstärke 1 Amp. $= 3 \times 10^9$ abs i

„ „ „ Potentialdifferenz 1 Volt $= \frac{1}{300}$ abs e

„ „ „ Widerstandes 1 Ohm $= \frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ abs w

Die Begründung des Faktors 3 bei diesen Festsetzungen kann erst später gegeben werden in einem besonderen Kapitel über das absolute elektrische Maßsystem.

Aus diesen Bestimmungen ist abzuleiten, daß das Produkt Amp $\times$ Volt $=$ Amp^2 $\times$ Ohm, das auch mit Watt bezeichnet wird, in einer Sekunde einer Arbeitsleistung entspricht von 10^7 absoluten Arbeitseinheiten oder 10^7 Erg.

Durch eingehende Versuche ist nun ermittelt worden, daß eine sogenannte „große" Wärmeeinheit, eine Kilogrammkalorie, einer Arbeitsleistung von 424 kgm entspricht. Ein Kilogrammmeter entspricht aber einer Arbeit von $1000 \times 981 \times 100$ Erg (cm, gr, sek), also ist eine kleine Kalorie, grammkalorie $= 424 \times 981 \times 100$ Erg. Daraus ergibt sich schließlich als Leistung eines Watt oder Voltampere in einer Sekunde der Wert $\frac{10^7}{424 \times 981 \times 100} = 0{,}24$ grkalor; besteht also die ganze Leistung in Wärmeentwicklung, so entwickelt 1 Watt in einer Sekunde (oder 1 Wattsekunde $=$ 1 Joule) 0,24 grcal.

Ferner ist in der Technik die Pferdekraft als Maß gebräuchlich, und es ist festgesetzt, daß die Leistung einer Pferdekraft in einer Sekunde 1 Pf. Sek. $=$ 75 kgm sein soll. Dann folgt aber 1 Wattsek. $= 10^7$ Erg $= \frac{75 \times 981 \times 10^5}{10^7} =$ 736 Pf. sek. oder 1 Watt $=$ 736 Pf.

Zwölftes Kapitel.

Bestätigung der Theorie durch die Erfahrung.

§ 73. Prüfung des Ohmschen Gesetzes.

Die im vorigen Kapitel entwickelte Theorie der stationären Ströme hat als wesentlichsten Ausgangspunkt die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes, ihre Richtigkeit würde also am direktesten zu prüfen sein, wenn es möglich wäre, die drei in diesem Gesetze auftretenden Größen, Potentialdifferenz, Stromstärke und Widerstand, jede selbständig in absolutem Maße zu messen, und dadurch das Ohmsche Gesetz selbst zu prüfen. Wir haben jedoch nur für die erste dieser Größen in den Elektrometern Instrumente, die den zu stellenden Anforderungen genügen; die in einem stationären Strome fließende Elektrizitätsmenge direkt zu messen, bietet sich überhaupt keine Möglichkeit; ihre Größe kann nach dem bisher besprochenen nur mit Hilfe der nach § 71 zu erwartenden Wärmeentwickelung in einem Leitungsdrahte, in dem keine elektromotorische Kraft eingeschaltet ist, berechnet werden. Das auf diese Weise zu erhaltende Strommaß würde aber ein äußerst mühsam bei Messungen zu verwertendes Maß sein, mit dem nur schwer eine befriedigende Genauigkeit zu erreichen ist. Es ist daher von großer Bedeutung, daß erfahrungsgemäß mit den auf diese Weise zu ermittelnden Stromstärken die erst später eingehend zu besprechenden magnetischen Eigenschaften der elektrischen Ströme genau proportional gehen. Diese Eigenschaften gestatten nun aber leicht die Ausbildung sehr genauer Meßinstrumente, Galvanometer, Amperemeter, durch die das Verhältnis von Stromstärken und auch diese selbst in absolutem Maße exakt gemessen werden können.

Sind aber die Potentialdifferenz und die Stromstärke zu messen, so könnten wir das Ohmsche Gesetz als Definition

für den Widerstand ansehen und diesen mit Hilfe jener beiden bestimmen. Für die Theorie bedeutet das Ohmsche Gesetz aber mehr als eine solche Definition, sondern es liegt der Theorie die wesentliche Voraussetzung zu Grunde, daß der gefundene Widerstand eine spezifische Eigenschaft der Körper ist, die vollständig unabhängig von den verwendeten Strömen und Spannungen ist. Eine Bestätigung der Theorie in der Erfahrung würde demnach darin zu finden sein, daß erstens bei den gleichen leitenden Verbindungen stets völlige Proportionalität zwischen den Stromstärken und den Spannungen gefunden wird, und daß zweitens durch die verschiedensten Methoden, Stromstärken und Spannungen, durch welche der Leitungswiderstand eines Körpers bestimmt wird, immer genau dieselbe Größe für denselben gefunden wird. Ersteres ist nun in der Tat bei allen Versuchen mit elektrischen Strömen immer wieder bestätigt, so daß an der Proportionalität zwischen Strom und Spannung bis zu der größten, erreichbaren Genauigkeit nicht zu zweifeln ist. Daß auch der Leitungswiderstand eines fest definierten Körpers eine ganz spezifische Eigenschaft der Substanz ist, geht daraus hervor, daß der Leitungswiderstand sich als ein ausgezeichnetes Mittel erwiesen hat, die Reinheit eines Materials und etwaige Strukturverschiedenheit oder Inhomogenität mit großer Schärfe zu erkennen.

§ 74. Leiter erster und zweiter Klasse; Tabelle von Leitvermögen.

Die Untersuchungen zur Ermittelung des Leitungswiderstandes der Materialien sind sehr zahlreich und mit großer Sorgfalt ausgeführt. Wesentlich bei denselben ist, daß der Leitungswiderstand sich als von der Temperatur abhängig erweist, so daß man genaue Angaben nur machen kann, wenn gleichzeitig die Temperatur gemessen wird. Da nun beim Bestimmen des Widerstandes einer Leitungsbahn im allgemeinen ein Strom durch dieselbe geschickt wird und dieser selbst nach dem Jouleschen Gesetz Wärme entwickelt, so kann man in die Messung dadurch Fehler hineinbekommen, daß die Temperatur der Leitungsbahn nicht konstant und besonders nicht gleich der Temperatur ist, die man außerhalb der Leitungsbahn beobachtet. Erst wenn man diese Fehlerquelle durch zweckmäßige Anordnung der

Messungen auf ein Mindestmaß herabbringt, oder wenn man die entstehende Temperaturerhöhung nach der Jouleschen Wärme in Rechnung setzt, erhält man den wahren Leitungswiderstand.

In Bezug auf das Leitvermögen kann man die Körper in zwei Klassen einteilen. Die Leiter erster Klasse umfassen alle Metalle und die Kohle, Leiter zweiter Klasse sind die Lösungen von chemischen Verbindungen in irgend einem Lösungsmittel. Die Leitung in den Leitern zweiter Klasse ist dadurch charakterisiert, daß der Stromdurchgang gebunden ist an eine chemische Zerlegung der gelösten Substanz, sie heißt demnach auch elektrolytische Leitung, während bei den Leitern erster Klasse ein ähnlicher Vorgang nicht wahrgenommen wird. Alle Untersuchungen stimmen aber darin überein, daß für beide Art Leitung das Ohmsche Gesetz vollkommen giltig ist.

Einige der wichtigeren Ergebnisse der Untersuchungen des Leitungswiderstandes der Materialien sind in den folgenden Zusammenstellungen gegeben. Es bedeutet σ den Widerstand in Ohm von einem Würfel aus der betreffenden Substanz von 1 cm Seitenlänge. $10^4\sigma$ ist dann der Widerstand eines Fadens von 1 m Länge und 1 mm² Querschnitt. α bedeutet den Temperaturkoeffizienten, das heißt die prozentische Zunahme des Widerstandes für 1° Cels.

A) Metallische Leiter.

	$10^4\sigma$ bei 15°	α
Kupfer, rein	0,01635	0,445
„ käuflich	0,0174	0,38
Silber, geglüht	0,0159	0,377
„ hart	0,0172	0,377
Gold, geglüht	0,0216	0,365
„ hart	0,0220	0,365
Platin, geglüht	0,0937	0,243
„ käuflich	bis zu 0,14	
Eisendraht, schwedisch	0,0982	0,48
„ gewöhnlich	0,132	0,48
„ rein	0,1042	0,48
Stahldraht, hart	0,184	
Quecksilber	0,94	0,0907
Mangankupfer		
(12,3 % *Mn*, 87,4 % *Cu*)	0,43	0,00005
(30 *Mn*, 68,6 *Cu*)	1,07	0,00005

B) Elektrolytische Leiter.

k bedeutet das Leitvermögen, also den reziproken Widerstand von 1 cm^3, a wieder die prozentische Änderung von k mit 1^0 C. Prozentgehalt der Lösung bedeutet Gewichtsteile des gelösten Körpers in 100 Gewichtsteilen Lösung.

Lösung	KCl		$NaCl$		$MgSO_4$		$ZnSO_4$		$CuSO_4$		HCl		H_2SO_4	
	10^8k	a	10^8k	a	10^8k	a	10^8k	a	10^8k	a	10^8k	a	10^8k	a
5%	69	2,0	67	2,2	26	2,3	19	2,2	19	2,2	395	1,58	209	1,21
10%	136	1,9	121	2,1	41	2,4	32	2,2	32	2,2	630	1,56	392	1,28
20%	268	1,7	196	2,2	48	2,7	47	2,4			762	1,54	653	1,45
30%							44	2,7			662	1,52	740	1,62

Auf die besonderen bei der elektrolytischen Leitung sich abspielenden Vorgänge wird im nächsten Kapitel näher eingegangen werden.

§ 75. Bestätigung des Jouleschen Gesetzes.

Einer weiteren Bestätigung durch die Erfahrung bedürfen die in § 71 abgeleiteten Beziehungen der elektrischen Stromenergie zu der entwickelten Wärme. Sehen wir zunächst ab von dem Gliede ei in der die Größe der elektrischen Energie bezeichnenden Formel, so handelt es sich um die Übereinstimmung des Gesetzes der Jouleschen Wärme mit den Erfahrungstatsachen. In gewisser Weise haben wir die Gültigkeit dieses Gesetzes im vorigen Paragraphen schon vorausgesetzt, indem wir es als Grundlage der Strommessung benutzten und nur die erfahrungsmäßig zulässige Substitution der magnetischen Meßgeräte, aus Gründen der technischen Ausführung der Messungen, einführten. Aber es handelt sich beim Jouleschen Gesetz nicht nur um die Tatsache, daß die entwickelte Wärme dem Quadrat der Stromstärke proportional ist, sondern auch, daß durch ein Volt-Amp-sekunde wirklich genau 0,24 grcal entwickelt werden. Man könnte daher, nachdem für das Volt eine absolute Messung bereits elektrostatisch möglich ist, durch das Joulesche Gesetz eine Bestimmung des Ampere im absoluten Maßsystem erhalten. In der Praxis hat es sich nun

gezeigt, daß durch Betrachtungen, die erst bei Besprechung der magnetischen Kräfte erläutert werden können, noch eine andere absolute Definition des Ampere möglich ist, die sich mit größerer Genauigkeit experimentell verwirklichen läßt. Daher ist es zweckmäßiger, diese Definition des Ampere als gegeben zu betrachten und nun die Genauigkeit des Jouleschen Gesetzes zu prüfen, oder, was dann auf dasselbe hinauskommt, festzustellen, ob die durch die elektrischen Messungen zu ermittelnde Beziehung zwischen dem mechanischen Maß der Arbeit und der Energie der Wärme, also das mechanische Wärmeäquivalent, auf dieselbe Zahl führt, wie der auf anderen Wegen gefundene Wert. Derartige Messungen sind mit großer Umsicht und Sorgfalt von Joule, Quintus-Icilius, H. F. Weber, Dieterici und Griffiths unter sehr verschiedenen Bedingungen ausgeführt, und haben die erfahrungsmäßig vollkommen genaue Gültigkeit des Jouleschen Gesetzes erwiesen.

§ 76. Spannungsverlust in Stromverteilungsnetzen.

Als eine weitere Bestätigung des Ohmschen Gesetzes und der Gesetze der Stromverzweigung kann ferner die beständige Anwendung derselben in großem Maßstabe in der Starkstromelektrotechnik gelten, und es mag daher auch diese noch ganz kurz hier berührt werden. Wenn es sich darum handelt, von einer Zentrale aus eine große Zahl von Konsumenten mit elektrischer Energie zu versorgen, so hat sich als das zweckmäßigste bewährt, daß in der Zentrale durch Maschinen oder Batterien stets eine möglichst konstante Spannungsdifferenz E erzeugt wird. Die elektrischen Ströme werden dann durch zwei Hauptkabel zunächst nach einem Punkt möglichst in der Mitte des Gebietes der Konsumenten geführt und von hier aus nach den verschiedenen Verbrauchsstellen hin verzweigt. Die Apparate, Glühlampen, Elektromotore, in denen die Konsumenten die elektrische Energie verbrauchen, sind nun stets so gebaut, daß sie alle mit der gleichen Spannung e, die etwas kleiner als E ist, normal arbeiten, und sie sind sämtlich parallel zwischen die von dem Verteilungspunkte kommenden + und — Leitungen eingeschaltet. Damit nun zu jeder Zeit jeder Apparat möglichst seine volle Leistung entwickeln kann, ist es erforder-

lich, daß an seinen Zuführungsklemmen stets die normale Spannung e zur Verfügung steht, ganz unabhängig, wieviel Strom gleichzeitig an anderen Stellen dem Verteilungsnetze entnommen wird. Vollkommen ist dies nun nie zu erreichen, da nach dem Ohmschen Gesetze in jedem Drahte ein Spannungsabfall proportional dem ihn durchfließenden Strom auftritt, es wird daher notwendig der Spannungsabfall von der Zentrale bis zum Verzweigungspunkt abhängen von der augenblicklichen Gesamtstromentnahme, also kann bei noch so konstantem E die Spannung im Verzweigungspunkt niemals ganz konstant sein. Die geringste Spannung e wird hier herrschen, wenn die größte vorkommende Stromstärke durch die Hauptleitungen fließt, und wenn gar kein Strom entnommen wird, muß $e = E$ sein. Man muß sich daher darüber verständigen, eine wie große Schwankung in e man im äußersten Falle als zulässig bezeichnen will. Wird als größte Spannungsschwankung eine Abweichung von 5 % zwischen dem größten und kleinsten Wert von e zugelassen, so folgt, wenn I die größte vorkommende Stromstärke ist:

$$E - e = IW = 0{,}05\,E,$$

wo W der Widerstand der Hauptkabel ist. Also

$$W = 0{,}05\,\frac{E}{I}\cdot$$

Ist daher die konstante Spannung in der Zentrale $E = 100$ Volt und die maximale Stromsträrke 100 Amp, so dürfen, um den geforderten Bedingungen zu genügen, die Hauptkabel einen Widerstand von nicht mehr als 0,05 Ohm haben. Dieselbe Energie von 10000 Voltamp kann nun aber auch geliefert werden, wenn die Spannung in der Zentrale 500 Volt beträgt, der Maximalstrom dafür aber nur $\frac{1}{5}$ des vorigen, also 20 Amp. In diesem Falle ist dann

$$W_1 = 0{,}05\,\frac{500}{20} = 1{,}25 \text{ Ohm} = 25\text{ W}.$$

Das heißt also, wenn wir für eine elektrische Energieübertragung die Betriebsspannung auf das n-fache erhöhen, so können dafür die für die Übertragungskabel erforderlichen Kupfermassen auf das $\left(\frac{1}{n^2}\right)$-fache reduziert werden.

Dieselbe Berechnungsweise wiederholt sich, wenn durch dasselbe Leitungspaar vom Verzweigungspunkte aus mehrere Konsumenten oder Apparate gemeinsam versorgt werden. Eine Spannungsschwankung am einzelnen Apparat infolge der Ein- und Ausschaltung anderer Apparate ist niemals ganz auszuschließen, aber durch richtige Berechnung der Leitungen ist die maximale Schwankung stets unter ein vorher zu bestimmendes Maß herunter zu bringen.

Dreizehntes Kapitel.

Die elektrochemischen Vorgänge.

---

§ 77. Elektrolytische Dissoziation und Leitung.

Der im § 71 abgeleitete Wert der elektrischen Energie eines Stromes hatte die Form $wi^2 - ei$. Das erste Glied dieses Ausdruckes stellt die entwickelte Joulesche Wärme dar und ist bereits besprochen; aus der Form des zweiten Gliedes konnte gefolgert werden: wenn durch den elektrischen Strom außer der Jouleschen Wärme noch irgend eine andere Arbeit geleistet wird, so muß eine der Stromrichtung entgegengesetzte elektromotorische Kraft bestehen, und wenn in der Strombahn irgendwo eine elektromotorische Kraft besteht, so findet noch eine Umwandlung elektrischer Energie in eine andere Energieform statt, oder umgekehrt, je nachdem elektromotorische Kraft und Strom entgegen oder gleich gerichtet sind. Die in Betracht kommenden anderen Energieformen sind die chemische Energie, Wärme und mechanische Arbeit.

Um die Beziehungen der elektrischen und chemischen Energie mit den Erfahrungstatsachen vergleichen zu können, muß zunächst kurz dargelegt werden, welche Vorstellung die Chemie sich von der Natur der Lösungen, die allein als elektrolytische Leiter hier in Betracht kommen, gebildet hat.

Die Erscheinungen des osmotischen Druckes, der Gefrierpunktserniedrigung und Siedepunktserhöhung haben übereinstimmend zu der Annahme

geführt, daß eine in einem Lösungsmittel, z. B. Wasser, aufgelöste chemische Verbindung, z. B. ein Salz, im allgemeinen sich in einem Zustande wenigstens teilweisen Zerfalles seiner Moleküle in ihre Bestandteile befinden muß. Der Grund zu einer derartigen Annahme wird darin gefunden, daß sich für die gelöste Substanz eine gleiche Regel aufstellen läßt, wie die Avogadrosche Regel für den gasförmigen Zustand. Diese Regel gestattet aber aus der Größe des Gasdruckes die Anzahl der Moleküle, d. h. der sich unabhängig voneinander bewegenden Teilchen, relativ zu berechnen. Ganz entsprechend führt der osmotische Druck zur Berechnug der Anzahl der in der Lösung sich unabhängig bewegenden Teilchen, und es hat sich gezeigt, daß diese Zahl größer zu sein pflegt, als die dem gelösten Salze normaler Weise zukommende Anzahl der Moleküle; daraus hat man dann auf den Zerfall eines Teils der Moleküle in mehrere unabhängig sich im Lösungsmittel bewegender Teile geschlossen. Das Salz ist teilweise „dissoziiert", und die Teilmoleküle werden „Ionen" genannt; das Verhältnis der Zahl zerfallener Moleküle zur Gesamtzahl der Moleküle heißt der „Dissoziationsgrad".

Die Theorien des osmotischen Druckes haben nun zunächst nur dazu geführt, einen solchen Zerfall in eine bestimmte Zahl von Teilen als vorhanden anzusehen, ohne über die Art dieser Teilmoleküle etwas bestimmtes aussagen zu können. Nun zeigt sich, daß für alle Lösungen, in denen elektrolytisches Leitvermögen wahrgenommen wird, nach der osmotischen Theorie auch eine Dissoziation angenommen werden muß, und auch umgekehrt, daß die Dissoziation in einem Lösungsmittel stets mit elektrolytischem Leitvermögen verknüpft ist. Ferner wird bei der elektrolytischen Leitung stets eine Zersetzung der gelösten Substanz und eine Ausscheidung der Zersetzungsprodukte beobachtet; nach den Beobachtungen von Hittorf über die Konzentrationsänderungen in vom Strome durchflossenen Lösungen ist außerdem zu schließen, daß bei der elektrolytischen Leitung in der ganzen Flüssigkeitsmenge das eine Teilprodukt im Sinne des Stromes und das andere in entgegengesetzter Richtung wandert. Nimmt man jetzt noch hinzu, daß die elektrolytische Leitung und Zerlegung der

gelösten Substanz schon mit den geringsten elektrischen Kräften eingeleitet werden kann, so wird man dazu geführt, daß die elektrischen Kräfte nicht erst die Trennung der Moleküle in die Teilprodukte bewirken können, denn dann müßte ein gewisser Minimalwert der elektrischen Kraft gefunden werden, der vorhanden sein muß, um zunächst die chemische Bindung im Molekül zu lösen; Die Leitung des elektrischen Stromes bewirkt vielmehr nur die Fortbewegung der bereits vorhandenen Teilmoleküle in bestimmter Richtung. Auf diese Weise führt dann die Kenntnis der elektrischen Zersetzungsprodukte zu einer Vorstellung von der Art des Zerfalles in Teilmoleküle.

Die Theorie nimmt daher jetzt an, daß bei der Dissoziation eines gelösten Körpers der Zerfall immer in zwei entgegengesetzte Arten von Ionen geschieht, von denen die einen positiv, die andern negativ elektrisch geladen sind und zwar derart, daß die Gesamtheit der positiven Ladungen gleich derjenigen der negativen sein muß. Wirkt nun eine elektrische Kraft in der Flüssigkeit, was dadurch erreicht werden kann, daß zwei Metallbleche in dieselbe eingetaucht, und diesen entgegengesetzte Ladungen zugeführt werden, so werden die positiv geladenen Ionen in der Richtung der elektrischen Kraft fortbewegt, die negativen in der entgegengesetzten, bis sie das entsprechende Metallblech, Elektrode genannt, erreichen. Die positiven Ionen (Kationen) gelangen zur negativen Elektrode (Kathode) und hier gleicht sich ihre positive Ladung gegen die entgegengesetze Ladung der Kathode aus; die nicht mehr elektrischen Teilmoleküle können dann aber als Teilmoleküle nicht mehr bestehen, sondern vereinigen sich zu einem normalen Molekül der Teilsubstanz, die an dieser Elektrode ausgeschieden wird. Das entsprechende vollzieht sich an der positiven Elektrode (Anode), zu welcher die negativen Ionen (Anionen) hingewandert sind. Ist z. B. Salzsäure (HCl) in Wasser gelöst, so ist ein Teil der Moleküle HCl bereits in selbständige Teile H und Cl zerfallen, die H tragen positive Ladungen und die Cl negative. Durch die elektrische Kraft werden die H zur Kathode, die Cl zur Anode getrieben, verlieren dann ihre Ladungen und bilden dort normale Moleküle H_2 und Cl_2 der Gase Wasser-

stoff und Chlor, welch letztere als Zersetzungsprodukte frei werden.

Da bei jeder Elektrizitätsentwickelung nach einer ganz allgemeinen Erfahrung stets entgegengesetzt gleiche Mengen beider Elektrizitäten auftreten, so ist selbstverständlich zu erwarten, daß die Ladungen der entgegengesetzten Ionen in einer Lösung naturgemäß entgegengesetzt gleich sind; die Ergebnisse von Faradays eingehenden Untersuchungen führen jetzt aber weiter dazu, daß die Ladung eines jeden Ions immer genau dieselbe Größe hat, aus welcher Substanz auch immer das Ion abgespalten ist, bis auf einen ganzzahligen Faktor, der der jedesmaligen Wertigkeit entspricht. Dies erkennen wir, wenn wir die von Faraday entdeckten und seitdem auf das genaueste bestätigten Erfahrungsgesetze der Elektrolyse formulieren.

§ 78. Faradays Gesetze.

Chemisch äquivalent nennt man solche Mengen zweier Substanzen, welche sich vollständig miteinander chemisch verbinden können, oder welche einander in der Verbindung mit einer dritten Substanz ersetzen können. Es sind z. B. 2 gr Wasserstoff und 96 gr SO_4 äquivalent, ebenso 2 gr H und $2 \times 39 = 78$ gr Kalium. Faradays Gesetze lauten nun:

1. Gesetz. Die durch den elektrischen Strom ausgeschiedene Menge einer Substanz ist immer der hindurchgegangenen Elektrizitätsmenge proportional.

2. Gesetz. Fließt derselbe Strom durch eine Reihe verschiedener Elektrolysen, so werden an allen Elektroden in gleichen Zeiten chemisch äquivalente Mengen ausgeschieden.

Aus dem ersten Gesetz leiten wir die Berechtigung zu der Annahme her, daß allein in dem Transport der elektrischen Ladungen durch die Ionen die Fortleitung der Elektrizität in den Lösungen besteht; neben diesem Transport besteht keine Stromleitung nach Art der metallischen Leitung. Erfahrungsgemäß ist auch das reine Lösungsmittel, z. B. reines Wasser, ein Nichtleiter. Nach dem zweiten Gesetz kommen wir dann zu der Vorstellung, daß bei der Dissoziation der Zerfall stets in zwei chemisch äquivalente, entgegengesetzte Gruppen, eben die Ionen, erfolgt, und daß alle gleichwertigen

Ionen immer gleiche Ladungsmengen positiver oder negativer Elektrizität besitzen müssen. Ein einwertiges Ion, z. B. *H*, führt immer die gleiche Elektrizitätsmenge, ganz gleichgültig ob es durch Dissoziation von HCl, oder von $H_2 SO_4$, indem hier zwei einwertige H-Ionen auf ein zweiwertiges SO_4-Ion kommen, oder irgend einer andern Substanz gebildet ist. Die gleiche Elektrizitätsmenge besitzen auch alle anderen einwertigen Ionen, z. B. *K*, *Na*, *Cl*. Zweiwertige Ionen, wie SO_4, oder *Fe*, wenn es aus $Fe\,Cl_2$ (Ferrochlorid) entstanden ist, haben die doppelte Ladungsmenge. Dreiwertige Ionen die dreifache; dabei ist zu beachten, daß ein Ion, je nachdem aus welcher Verbindung es stammt, verschiedene Wertigkeit haben kann, z. B. *Fe* aus $Fe\,Cl_2$ ist zweiwertig, aus $Fe\,Cl_3$ ist dreiwertig.

§ 79. Berechnung der Ladung eines Ions.

Durch diese Vorstellungsweise wird den Faradayschen Gesetzen und auch allen anderen über die Lösungen bekannter Erscheinungen vollkommen genügt, und es muß nun auch noch möglich sein, die Größe der Ladung eines einwertigen Ions zu bestimmen. Da wir über die Größe der Ionen selbst keine Vorstellung haben, so können wir natürlich einen absoluten Wert nicht angeben. Aber die Gewichte der Ionen müssen sich verhalten wie die Zahlen, die man erhält, wenn man die Atomgewichte der einzelnen in jedem Ion vorhandenen einzelnen Atome addiert. Nennt man die so erhaltene Zahl ein Grammäquivalent der ausgeschiedenen Substanz, so muß zur Ausscheidung eines Grammäquivalents aller einwertigen Substanzen immer die gleiche Elektrizitätsmenge erforderlich sein. Nehmen wir als Elektrizitätseinheit diejenige Menge, die bei dem Strom von ein Ampere in einer Sekunde durch den Querschnitt der Leitungsbahn fließt, so ist durch F. Kohlrausch festgestellt, daß ein Ampsek oder ein Coulomb die Menge von 0,001118 gr Silber abscheidet. Silber ist einwertig und hat das Atomgewicht 108; ein Grammäquivalent Silber sind daher 108 gr Silber. Zur Abscheidung eines Grammäquivalents sind danach erforderlich

$$\frac{108}{0{,}001118} = 96\,540 \text{ Ampsek oder Coulomb.}$$

Die gleiche Elektrizitätsmenge scheidet 39 gr Kalium, 23 gr Natrium, 1 gr Wasserstoff aus, bezw. jedes einwertige Ion ist mit dieser Elektrizitätsmenge geladen. Die doppelte Elektrizitätsmenge ist erforderlich, um 96 gr SO_4 auszuscheiden, oder um ein Grammäquivalent Eisen, also 56 gr Fe aus $Fe\,Cl_2$ auszuscheiden, die dreifache, um die gleiche Eisenmenge aus $Fe\,Cl_3$ zu gewinnen. Mit der gefundenen Zahl läßt sich also auf Grund der gewonnenen Vorstellungen jede elektrolytische Zersetzung quantitativ vorausberechnen; und, daß diese Vorausberechnungen erfahrungsgemäß zutreffen, bildet die Rechtfertigung für die Ausbildung dieser theoretischen Vorstellungen.

§ 80. Elektrolytische Polarisation.

Durchsetzt ein auf irgend eine Weise erzeugter elektrischer Strom eine Flüssigkeit, so hat er nach dem vorhergehenden im Innern derselben nichts anderes zu leisten, als die Ionen fortzubewegen. Da nun die horizontale Fortbewegung einer Masse an sich keine Arbeit darstellt, so besteht die ganze Arbeitsleistung des Stromes in der Flüssigkeit nur in der Überwindung der der Ionenbewegung entgegenstehenden Hindernisse, und diese scheinen von der gleichen Natur wie Reibungswiderstände zu sein. Dementsprechend besteht die Arbeitsleistung des Stromes in der Flüssigkeit selbst in einfacher Wärmeentwickelung, nach dem Jouleschen Gesetz unabhängig von der Stromrichtung, wie überhaupt die Gesetze von Ohm und Joule für Flüssigkeiten genau so gelten wie für Metalle. Daneben treten an den Elektroden noch besondere Leistungen auf, die sich in der Abscheidung der Zersetzungsprodukte äußern. Die genaue Feststellung der Einzelleistungen auf jeder Elektrode ist nun im allgemeinen recht schwierig und setzt ein tieferes Eingehen auf die speziellen chemischen Vorgänge voraus, als im Rahmen dieser Bearbeitung zulässig ist; es soll daher hier nur auf die Gesamtleistung, also die Summe der an beiden Elektroden auftretenden Wirkungen, eingegangen werden.

Bestehen zunächst beide Elektroden aus dem gleichen Metall, und ist dies Metall zugleich auch das Metallion der Lösung, wie z. B. bei Zinkelektroden in Zink-

sulfatlösung, so wandert das Metallion beim Stromdurchgang an die negative Elektrode und schlägt sich dort nieder, das SO_4-Ion gelangt an die Anode, löst aber hier sofort Zink auf und geht als neu gebildetes Zinksulfat wieder in die Lösung. Das Gesamtresultat, nach beliebig langem Stromdurchgang ist also immer, daß die Lösung genau dieselbe geblieben ist, die Anode ist dünner, die Kathode dicker geworden. Eine besondere Arbeitsleistung durch den Strom ist also nicht eingetreten; in dem Ausdruck für die Arbeit $wi_2 - ei$ muß also, wenn die Zelle als Ganzes betrachtet wird, der Teil $ei = 0$ sein, das heißt, in der Zelle kann in diesem Falle keine elektromotorische Kraft auftreten.

Findet eine derartige Wiederherstellung der Lösung nicht statt, oder sind die Elektroden nicht aus demselben Metall, wie das Metall der Lösung, so entsteht durch den Stromdurchgang eine andere Verteilung der chemischen Stoffe, als vorher da war; außer der Jouleschen Wärme wird dann durch den Strom noch eine andere Arbeit geleistet, die von der Stromrichtung wesentlich abhängt. Das Glied ei ist dann nicht gleich Null, also besteht in der Zelle dann eine elektromotorische Kraft; diese nennt man die elektromotorische Kraft der Polarisation. Wenn durch einen Strom in einer Zersetzungszelle chemische Arbeit geleistet wird, so muß die Zelle polarisiert sein, und zwar muß ihre elektromotorische Kraft dem Strome entgegengesetzt sein. In den meisten Fällen haften die Zersetzungsprodukte hinreichend lange an den Elektroden, um die Polarisation auch noch nach dem Unterbrechen des Stromes als eine an den Elektroden bestehende Potentialdifferenz wahrnehmen zu können, und dadurch die Richtigkeit der obigen Schlußfolgerung bestätigen zu können.

Diese durch die Polarisation hervorgerufene Potentialdifferenz vermag nun in einem die Elektroden verbindenden Drahte mehr oder weniger lange einen elektrischen Strom zu unterhalten. Dieser Strom dauert so lange, bis die durch den ersten Strom ausgeschiedenen Zersetzungsprodukte wieder in die Lösung zurückgetreten sind und der Anfangszustand wieder hergestellt ist. Während dieser Zeit fließt dann in der Lösung in der Zelle ebenfalls ein elektrischer Strom, durch

welchen alle Ionen wieder zurückbewegt werden. Eine polarisierte Zelle kann aufgefaßt werden, wie ein aus dem stabilen Gleichgewicht gebrachter Körper, der, sobald ihm die Freiheit gegeben wird, wieder in die Gleichgewichtslage zurückkehrt. Diese Freiheit erhält die Zelle, sobald die Elektroden durch einen Draht verbunden werden; durch die vorhandene chemische Differenzierung besteht eine elektromotorische Kraft, die den jetzt entstehenden Strom erzeugt und ihm gleichgerichtet ist; ei ist jetzt negativ, der Strom nimmt Arbeit auf, d. h. er wird unterhalten durch die bei der chemischen Rückbildung wieder frei werdende Arbeit.

§ 81. Das galvanische Element.

Genau derselbe Vorgang, wie bei der Entladung einer polarisierten Zelle, spielt sich auch im galvanischen Element ab, nur daß dieses von vornherein so zusammengesetzt ist, daß die Tendenz zu einer chemischen Umbildung in ihm gegeben ist. Auch im galvanischen Element besteht, sobald Strom nach außen abgegeben wird, im Innern der gleiche Strom, genau so, wie wenn der außen fließende Strom durch irgend eine ganz andere elektromotorische Kraft erzeugt wäre. Die Vorgänge im Element sind die gleichen wie in der Zersetzungszelle. Ist das Element so in den Stromkreis eingeschaltet, daß es selbst Ursache des Stromes sein kann, ist also seine elektromotorische Kraft dem Strome gleichgerichtet, so muß in der Gesamtheit der in ihm auftretenden chemischen Vorgänge das Entstehen neuer Verbindungen das Zerlegtwerden bestehender Verbindungen überwiegen; denn beim Entstehen einer Verbindung wird chemische Energie verbraucht und dafür muß andere Energie verfügbar werden, umgekehrt bei der Zersetzung. In dem Daniellschen Element

$$Zn \mid ZnSO_4 \mid CuSO_4 \mid Cu$$

z. B. wird Zinksulfat gebildet und Kupfersulfat zerlegt; werden beide Salze für sich auf chemischem Wege gebildet, so wird bei der Entstehung von $ZnSO_4$ mehr Wärme frei, als bei der äquivalenten Menge $CuSO_4$, und die beim Entstehen einer Verbindung frei werdende Wärme ist das Maß

für die chemische Energie und wird die „Wärmetönung“ genannt.

§ 82. Arbeitsleistung in umkehrbaren Elementen.

Nachdem wir so von den bei der Stromerzeugung durch galvanische Elemente sich abspielenden Vorgängen eine Vorstellung gewonnen haben, können wir auf die Beziehungen zwischen der gewonnenen elektrischen Energie und der verbrauchten chemischen näher eingehen. Es gibt zunächst unter den galvanischen Elementen solche, die vollkommen umkehrbar sind, d. h. bei denen durch Hindurchschicken eines entgegengesetzten elektrischen Stromes die chemischen Vorgänge vollständig wieder rückgängig gemacht werden können, z. B. das Daniellsche Element; bei anderen bewirken die durch den Strom ausgeschiedenen Produkte sekundäre Prozesse rein chemischer Natur, und dadurch werden dieselben nicht mehr umkehrbar. Nur auf die ersteren sollen die folgenden Schlüsse angewendet werden.

Hat ein umkehrbares Element bei der Temperatur T die elektromotorische Kraft E, so wollen wir demselben so lange Strom entnehmen, bis eine Elektrizitätseinheit dasselbe durchflossen hat, dann ist die geleistete elektrische Arbeit gleich E. Dabei hat sich dann eine bestimmte Menge des einen Metalls aufgelöst, ist eine Verbindung eingegangen, und eine äquivalente Menge des anderen Metalles ist ausgeschieden. Die diesem chemischen Vorgang entsprechende Wärmetönung sei Q. Ist dann $Q - E$ nicht gleich Null, sondern positiv, so wird nicht die ganze, aus dem chemischen Prozeß zu gewinnende Energie in elektrische verwandelt, sondern im Element wird noch Wärme frei. Umgekehrt kühlt sich das Element bei Stromentnahme ab, wenn $E - Q$ positiv ist.

Bringen wir jetzt das Element auf die Temperatur $T - dT$, so wird auch seine elektromotorische Kraft im allgemeinen eine andere, $E - dE$, sein. Bei dieser niederen Temperatur schicken wir jetzt durch eine äußere Elektrizitätsquelle die Elektrizitätsmenge Eins in entgegengesetzter Richtung hindurch, dann ist $E - dE$ die elektrische Leistung und $Q - dQ$ die Wärmetönung. In diesem Falle wird in der Zelle eine Wärmeabgabe von der Größe $Q - dQ - E + dE$ eintreten. Erwärmen wir dann die Zelle wieder auf die Anfangs-

temperatur T, so ist der Anfangszustand wieder vollständig erreicht, wir haben dann mit der Zelle einen vollkommenen, umkehrbaren Kreisprozeß ausgeführt. Da nun elektrische und mechanische Arbeit vollkommen in einander umwandelbar sind und daher als gleichwertig zu setzen sind, so lassen sich auch auf diesen Kreisprozeß die Schlüsse anwenden, die die Wärmelehre an den Carnotschen Kreisprozeß knüpft.*) Es wird aber bei diesem Prozeß, wenn das Element Strom gibt, die Wärmemenge $E - Q$ bei der Temperatur T aufgenommen, dagegen, wenn Strom durch dasselbe geschickt wird, bei der Temperatur $T - dT$ die Wärmemenge

$$Q - dQ - E + dE$$

abgegeben, damit das Element beim Stromdurchgang die konstante Temperatur T bezw. $T - dT$ behalten kann. Der Überschuß der geleisteten elektrischen Arbeit über die verbrauchte ist dabei dE. Da der Prozeß umkehrbar ist, muß nun der Nutzeffekt der Umwandlung von Wärme in Arbeit der gleiche sein wie beim Carnotschen Kreisprozeß, also folgt

$$\frac{dE}{E-Q} = \frac{dT}{T},$$

oder

$$E - Q = T\frac{dE}{dT}.$$

Hieraus muß folgendes geschlossen werden: Wenn die elektromotorische Kraft eines Elementes mit der Temperatur zunimmt, so muß das Element bei Stromentnahme sich abkühlen, denn die auftretende elektrische Energie ist dann notwendig größer als die Wärmetönung des chemischen Prozesses. Umgekehrt wird im Element noch Wärme frei, wenn die elektromotorische Kraft mit der Temperatur abnimmt.

Diese Schlußfolgerungen sind durch Versuche von Braun und besonders von Jahn auf das Eingehendste geprüft und bestätigt worden.

§ 83. Elektromotorische Kraft und Klemmspannung.

Wir haben es bei allen durch galvanische Elemente erzeugten Strömen stets mit vollkommen geschlossenen

*) Vergl. W. Voigt, Thermodynamik. Diese Samml., Bd. 39 S. 200 u. ff.

Strombahnen zu tun; der Strom beginnt nicht erst an den Elektroden oder Polen des Elementes, sondern seine Bahn bildet durch den die Flüssigkeit des Elementes durchsetzenden Strom einen vollständig geschlossenen Kreis, auf den sich nun auch wieder das zweite Kirchhoffsche Gesetz anwenden läßt. Bezeichnet E die elektromotorische Kraft des Elementes, J den in allen Querschnitten der ganzen Strombahn überall gleichen Strom, W den Widerstand des äußeren Drahtkreises, w den Widerstand im Elemente selbst, der zwischen den Polklemmen derselben liegt, der also aus dem Flüssigkeitswiderstande, dem Widerstande der Elektroden und etwa noch vorhandenen Übergangswiderständen besteht, dann ist $E = JW + Jw$.

Die Spannungsdifferenz an den Enden des äußeren Leitungsdrahtes ist aber nach dem Ohmschen Gesetze gleich JW und diese herrscht also bei der Stromentnahme an den Klemmen des Elementes. Die Klemmspannung ist also $JW = E - Jw$, also stets kleiner als die elektromotorische Kraft, sobald Strom entnommen wird, und zwar um so mehr, je größer der Widerstand des Elementes und der entnommene Strom ist. Es ist dabei ganz gleichgültig an welcher Stelle im Element, ob an beiden Elektroden oder nur an einer, der eigentliche Sitz der elektromotorischen Wirkung sich befindet.

§ 84. Messen elektromotorischer Kräfte.

Mißt man die Klemmenspannung eines Elementes mit dem Quadrantelektrometer, also ohne Stromentnahme, so erhält man einen Wert, der der elektromotorischen Kraft gleich ist. Auf andere Weise und noch genauer kann man die elektromotorische Kraft messen, wenn man durch Anwendung einer entgegengesetzten elektromorischen Kraft den Strom im Elemente gerade kompensiert. Eine solche Gegenkraft erhält man durch einen von einem konstanten Strom durchflossenen Draht, der durch irgend ein hinreichend starkes galvanisches Element E_1 (Akkumulator) erzeugt ist (Fig. 17). In solchem Drahte ist beim Stromdurchgang ein ganz bestimmtes Potentialgefälle; legen wir daher das zu messende Element mit seinem $+$Pol an das Ende des Drahtes, das das höhere positive Potential hat, so wird an dem Drahte ein Punkt zu finden

sein, dessen Potentialdifferenz gegen den ersteren gerade gleich der elektromotorischen Kraft des Elementes ist. Legen wir an diesen Punkt den negativen Pol des Elementes, so

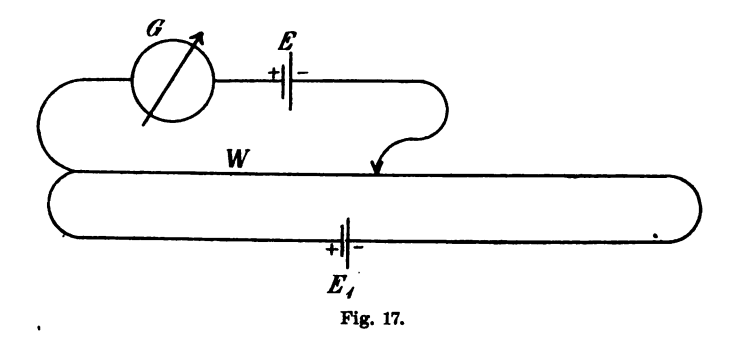


Fig. 17.

werden wir auch bei Einschaltung eines hochempfindlichen Galvanometers G in den Zweig des Elementes E keinen Strom wahrnehmen können. Ist der Strom im Hauptkreise J und der Widerstand W zwischen den beiden Punkten bekannt, so hat das Element die elektromotorische Kraft $JW = E$. Für irgend ein anderes Element wird der zweite Punkt an anderer Stelle liegen, damit wieder das Galvanometer Stromlosigkeit zeigt; es ist also der Widerstand ein anderer, etwa W', die elektromotorische Kraft $E' = JW'$. Kennt man die elektromotorische Kraft eines Elementes genau (Normalelement von Latimer Clark

$$Zn \,|\, Z_n SO_4 \,|\, Hg SO_4 \,|\, Hg, \; E = 1{,}438 \text{ Volt}),$$

so kann man ein solches Element benutzen, um nach dieser Schaltung mit Hilfe bekannter Widerstände andere elektromotorische Kräfte zu messen.

§ 85. Schaltung von Elementen.

Hat man eine Anzahl, n, gleicher Elemente von der elektromotorischen Kraft E und dem inneren Widerstand w, so kann man dieselben sowohl hintereinander als auch nebeneinander schalten. Hat der äußere Schließungskreis den Widerstand W, so wird der Strom bei

Hintereinanderschaltung $J = \frac{nE}{W + nw} = \frac{E}{\frac{W}{n} + w}$,

Parallelschaltung $J = \frac{E}{W + \frac{w}{n}}$.

Ist W groß gegen w, so ergibt die erste Schaltung den stärkeren Strom, ist dagegen w groß gegen W, so ergibt die Parallelschaltung stärkeren Strom. Gegenwärtig werden zu allen Versuchen meist Akkumulatoren als Stromquellen benutzt; bei diesen ist w sehr klein und daher die Hintereinanderschaltung meist vorzuziehen.

Vierzehntes Kapitel.

Thermoelektrizität.

§ 86. **Peltiers und Seebecks Beobachtungen.**

Auch in einer rein metallischen Leitungsbahn, in der also jede elektrolytische Wirkung ausgeschlossen ist, können durch den elektrischen Strom außer der Jouleschen Wärme noch andere Energieumwandlungen auftreten. Peltier bebeobachtete bereits 1834, daß ein Strom, der die Lötstelle, an der zwei verschiedene Metalle verbunden sind, passiert, an dieser Stelle Wärme entwickelt oder auch Abkühlung bewirkt, je nach der Richtung des Stromes. Es tritt also beim Durchgang des Stromes durch eine solche Lötstelle im Ausdruck für die Stromenergie zweifellos ein Glied von der Form ei auf, und wir müssen nach unserer Theorie erwarten, daß sich eine entsprechende elektromotorische Kraft erkennen lassen muß. In der Tat war auch bereits 1821 von Seebeck beobachtet worden, daß in einem aus zwei verschiedenen Metallen bestehenden Leitungsringe elektrische Ströme entstehen, sobald die Lötstellen auf ungleiche Temperatur gebracht werden; diese Ströme werden thermoelektrische Ströme genannt. Derartige Ströme scheinen nicht möglich zu sein, wenn der Leitungskreis aus einem ganz homogenen Metall besteht, in dem auch keine Strukturunterschiede vorhanden sind, und auch nicht bei beliebig verschiedenen Metallen, wenn die Temperatur überall die gleiche ist. Danach ist das Zustandekommen des thermoelektrischen Stromes mit Notwendigkeit geknüpft an eine Wärmeaufnahme bei einer oberen Temperatur und Wärmeabgabe bei einer geringeren Temperatur. Da die Peltiersche Wärmeentwicklung nach

den direkten Beobachtungen umkehrbar ist, das heißt bei Anwendung der Stromrichtung auch die Wärmebewegung genau umgekehrt wird, so müssen wir erwarten, daß ein thermoelektrischer Stromkreis sich auch als ein umkehrbarer Prozeß ansehen läßt.

§ 87. Einfache Theorie der Thermoströme.

Unter Anwendung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie*) läßt sich jetzt folgendermaßen schließen. Es sei T_1 die Temperatur der warmen, T_2 die der kalten Lötstelle, als absolute Temperatur gemessen. Im Leitungskreis besteht dann nach Seebeck eine elektromotorische Kraft V, die der Differenz $T_1 - T_2$ wenigstens innerhalb gewisser Grenzen proportional ist. Also $V = a(T_1 - T_2)$, wo a als konstanter Faktor angesehen werden soll. Wenn dann durch den entstehenden Strom durch den Querschnitt der Leitung die Elektrizitätsmenge E geflossen ist, so entspricht das einer elektrischen Energie von der Größe EV. Ist der Strom sehr gering, sodaß die Joulesche Wärme unberücksichtigt bleiben kann, so muß die Größe EV äquivalent sein der Differenz der aufgenommenen und abgegebenen Wärme $Q_1 - Q_2$. Also wenn wir die Wärme auch in mechanischem Maß gemessen denken

$$EV = Q_1 - Q_2 = a(T_1 - T_2)E.$$

Das heißt, wenn die Wärmemenge Q_2 von höherer zu niederer Temperatur übergeht, wird $Q_1 - Q_2$ in elektrische Energie umgewandelt. Da nun der Vorgang als umkehrbar angenommen ist, so daß ein durch äußere elektromotorische Kraft erzeugter Strom die Wärmebewegung in vollständig umgekehrter Richtung bewirkt, so muß nach dem zweiten Hauptsatz oder der Carnotschen Maschine, die gewonnene Arbeit zu der bei T_1 aufgenommenen Wärme sich wie die Temperaturdifferenz zur oberen Temperatur verhalten; also

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

oder

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

*) Vergl. W. Voigt, Thermodynamik. Diese Samml., Bd. 39 S. 200 u. ff.

Dann folgt aber aus der Vereinigung mit der vorigen Gleichung:

$$Q_1 = a\,T_1 E$$
$$Q_2 = a\,T_2 E.$$

Nehmen wir nun an, die Umwandlung von Wärme in elektrische Energie und umgekehrt, entsprechend Q_1 und Q_2, erfolge nur dort, wo der Leitungskreis mit den beiden Wärmequellen Wärme austauscht, also an den Lötstellen und allenfalls deren nächster Umgebung, so werden wir an diesen Stellen den Sitz zweier elektromotorischer Kräfte erwarten, V_1 und V_2, die proportional den Q_1 und Q_2 sein müssen, und deren Differenz $V_1 - V_2 = V$ ist. Es kann auch bei dieser Annahme a nur eine wirkliche Konstante sein, denn die durch einen von außen bewirkten Strom erzeugte Wärme Q_1 muß jedenfalls von T_2 unabhängig sein und ebenso Q_2 von T_1, also kann a von keiner der Temperaturen abhängen. Diese elektromotorischen Kräfte müßten dann nach obigem für sich ganz allgemein den absoluten Temperaturen proportional, und die gesamte elektromotorische Kraft V müßte ganz allgemein der Temperaturdifferenz proportional sein.

§ 88. Thomson-Effekt.

Der zuletzt gezogene Schluß erweist sich aber als mit der Erfahrung im Widerspruch, also kann die Annahme über die Verteilung der elektromotorischen Kräfte im thermoelektrischen Kreis nicht richtig sein. Hält man bei einem Thermoelement aus Kupfer und Eisen eine Lötstelle auf konstanter Temperatur und steigert stetig die Temperatur der anderen Lötstelle, so wächst die elektromotorische Kraft zunächst beständig, bis sie bei einer Temperatur von etwa 280° ein Maximum erreicht, dann wieder abnimmt und schließlich sogar die entgegengesetzte Richtung annehmen kann. Dies können wir uns dadurch deuten, daß in dem Werte von $V_1 - V_2$ $V_1 < V_2$ ist, und daß V_1 mit wachsender Temperatur T_1 abnimmt, bei 280° den Wert Null erreicht und dann wieder zunimmt. Die Temperatur, bei der $V_1 = 0$ ist, nennt man die neutrale Temperatur für diese Metallkombination; ähnliche neutrale Temperaturen sind für die meisten Metallkombinationen

beobachtet worden, und durch Versuche von Budde ist auch gezeigt, daß die Peltiersche Wärmeentwickelung bei der neutralen Temperatur in der Tat gleich Null ist, so daß die obige Vorstellung über den Gang von V_1 sich rechtfertigt, denn nur für $V_1 = 0$ können wir auch die Wärmeentwickelung oder Absorption Null erwarten.

Nehmen wir nun an, wir hätten in einem Thermokreis die obere Temperatur T_1 gleich dieser neutralen Temperatur gemacht, dann ist $V_1 = 0$, und die elektromotorische Kraft im Gesamtkreise ist gleich $- V_2$. Halten wir dann an der im vorigen Paragraphen entwickelten Vorstellung von der Wirkungsweise des thermoelektrischen Kreises fest, so kann nun die Richtung des Stromes nur diejenige sein, durch welche bei der oberen Temperatur die Peltierwirkung in Wärmeaufnahme bei der unteren in Wärmeabgabe besteht, denn darauf beruhte das Entstehen der Stromenergie. In dem angenommenen Fall tritt aber bei T_1 keine Peltierwirkung ein, d. h. es wird zwar Wärme von dem Metall aufgenommen, aber es findet an dieser Lötstelle keine Umwandlung der Wärme in elektrische Energie statt. Trotzdem wird aber an der unteren Lötstelle elektrische Energie in Wärme verwandelt und als solche abgegeben, und es findet außerdem eine Entwickelung Joulescher Wärme statt. Folglich muß notwendig an irgend welchen anderen Stellen zwischen den Lötstellen eine Wärmeabsorption und Entstehen der elektrischen Energie eintreten; d. h. auch in einem einzigen Metalldraht, dessen Enden ungleich erwärmt sind, kann durch Wärmeabsorption eine elektromotorische Kraft auftreten, und wenn auch dieser Vorgang umkehrbar ist, so muß auch beim Stromdurchgang durch ein ungleich erwärmtes Metall außer der Jouleschen Wärme eine weitere von der ersten Potenz des Stromes abhängige Wärmeentwickelung auftreten können. Diese Erscheinung wurde von W. Thomson zuerst erschlossen und dann auch experimentell bestätigt, sie wird nach ihm auch Thomsoneffekt genannt. Genaue Versuche von Le Roux haben diese Tatsache bestätigt, und Braun und Haga haben dieselbe auch für flüssige Leiter erwiesen, so daß sie nicht als die einfache Seebecksche Thermoelektrizität, beruhend auf der durch die ungleiche Temperatur bewirkte Strukturverschiedenheit im Metall angesehen werden darf.

§ 89. Vollständige Theorie der Thermoströme.

Unter der Annahme, daß Peltier- und Thomsoneffekt beides umkehrbare Erscheinungen sind, und daß wir es nur mit Strömen von so geringer Intensität zu tun haben, daß die Joulesche Wärme unberücksichtigt bleiben kann, kann jetzt die allgemeine Theorie in folgender Weise aufgestellt werden. Der Kreis bestehe aus zwei Metallen, deren Lötstellen die absoluten Temperaturen T_1 und T_2 haben; die Peltiereffekte absorbieren die Wärmemengen Q_1 und Q_2, wenn durch den Strom die Einheit der Elektrizitätsmenge fortbewegt ist; durch die Thomsoneffekte seien die Wärmemengen q_1 in dem einen Draht und q_2 im andern durch die gleiche Strommenge absorbiert in einem Abschnitt, an dessen Enden die Temperaturen T und $T+dT$ sind, und in dem die Stromrichtung von warm zu kalt geht. Alle Wärmemengen seien in mechanischem Maß gemessen, und nicht absorbierte, sondern entwickelte Wärme sei als negative Absorption gerechnet. Bei der angenommenen Strommenge ist die elektromotorische Gesamtkraft V gleich der Energie des ganzen Stromes, daher haben wir:

$$V = Q_1 - Q_2 + \int_{T_2}^{T_1} q_1\, dT + \int_{T_1}^{T_2} q_2\, dT.$$

Da Q_1 und Q_2 dieselbe Funktion von T ist, denn wir haben nur zwei Metalle, so kann geschrieben werden

$$Q_1 - Q_2 = \int_{T_2}^{T_1} \frac{dQ}{dT}\, dT,$$

also wird:
$$V = \int_{T_2}^{T_1} \left[\frac{dQ}{dT} + (q_1 - q_2)\right] dT.$$

Nach dem zweiten Hauptsatz ist ferner

$$0 = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} + \int_{T_2}^{T_1} \frac{q_1}{T}\, dT - \int_{T_2}^{T_1} \frac{q_2}{T}\, dT,$$

und hierfür kann wieder geschrieben werden

$$\int_{T_2}^{T_1} \left(\frac{d}{dT}\left(\frac{Q}{T}\right) + \frac{q_1 - q_2}{T}\right) dT = 0.$$

Da dies letzte für jedes T_1 und T_2 gelten muß, so muß schon für sich

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{Q}{T}\right)+\frac{q_1-q_2}{T}=0$$

sein, oder

$$q_1-q_2=\frac{Q}{T}-\frac{dQ}{dT},$$

folglich wird dann

$$V=\int_{T_2}^{T_1}\frac{Q}{T}\,dT.$$

Haben wir jetzt nur eine kleine Temperaturdifferenz, also die Temperaturen T und $T+Td$, so wird

$$dV=\frac{Q}{T}dT \text{ oder } \frac{dV}{dT}=\frac{Q}{T}.$$

Diese Gleichung läßt sich in der Erfahrung prüfen, da alle Teile experimentell leicht zugänglich sind; sie findet unter anderem ihre Bestätigung darin, daß die Peltierwärme $Q=0$ ist, wenn $\frac{dV}{dT}=0$ ist, also im neutralen Punkt.

Für den Thomsoneffekt folgt dann weiter

$$q_1-q_2=\frac{Q}{T}-\frac{dQ}{dT}=T\frac{d^2V}{dT^2},$$

woraus sich die Differenz der Werte q_1-q_2 bestimmen ließe.

§ 90. Gleichung von Avenarius.

Die vollständige Prüfung der Ergebnisse dieser Theorie ist merklich schwieriger, als es zunächst scheinen mag, denn es zeigen sich die Thermokräfte außerordentlich abhängig von der Reinheit des Materials und besonders auch von Strukturverschiedenheiten, so daß die Vergleichung von Zahlenwerten, die nicht an denselben Materialien gewonnen sind, große Unsicherheiten mit sich bringt. Ferner mißt man bei der Bestimmung der elektromotorischen Kräfte immer die Summe mehrerer einzelner, und da alle Metalle, vielleicht das Blei ausgenommen, deutlichen Thomsoneffekt

zeigen, so wird es sehr schwierig, die Seebeckschen Thermokräfte von den Thomsonschen zu trennen. Eine Beziehung, die von Avenarius gefunden wurde, und auch durch Messungen von F. Kohlrausch und anderen bestätigt wurde, scheint allgemeinere Gültigkeit zu haben. Avenarius fand, daß die thermoelektrische Kraft in einem aus zwei Metallen bestehenden Kreise, deren Lötstellen die Temperaturen T_1 und T_2 haben, sich darstellen läßt durch die Form

$$V = b(T_1 - T_2) - c(T_1^2 - T_2^2) = (T_1 - T_2)(b - c(T_1 + T_2)) .$$

Hat man die Konstanten b und c empirisch bestimmt, so läßt sich die Temperatur des neutralen Punktes hiernach vorausberechnen. Offenbar wird $V = 0$ werden bei wachsendem T_1, wenn $b = c(T_1 + T_2)$. Setzt man noch $T_1 + T_2 = 2\,T_m$, so sieht man, daß $T_m = \frac{1}{2}\frac{b}{c}$ die neutrale Temperatur ist.

Aus der Gleichung von Avenarius findet man aber auch für variabeles T_1

$$\frac{dV}{dT} = b - 2\,c\,T_1 .$$

Stellt man daher die Größe $\frac{dV}{dT}$ graphisch dar durch die Ordinaten, deren zugehörige Abszissen dem T_1 entsprechen, so erhält man für den Ort von $\frac{dV}{dT}$ eine gerade Linie. Diese Beziehnung ist sehr eingehend untersucht, besonders auch von Thomson und Tait, und hat sich im allgemeinen sehr genau zutreffend erwiesen. Nur bei einigen Metallen, z. B. *Fe/Pt*, zeigt die Gerade bei bestimmten Temperaturen plötzliche Krümmungen, doch liegt hier die Annahme nahe, daß man es hier mit molekularen Umlagerungen in der Struktur der Metalle bei diesen Temperaturen zu tun hat.

§ 91. Graphische Darstellung nach Maxwell.

Nimmt man die Darstellbarkeit von $\frac{dV}{dT}$ durch eine Gerade als allgemeineres Gesetz, so kann man diese Beziehung sehr schön verwerten, um durch eine graphische Darstellung leicht eine Übersicht über die gesamten Vor-

gänge zu erhalten. Wir nehmen zunächst das Thermoelement Kupfer-Blei. Die Abszissen in der Figur 18 seien die absoluten Temperaturen und die Ordinaten die Größe $\frac{dV}{dT} = \frac{Q}{T}$, wir

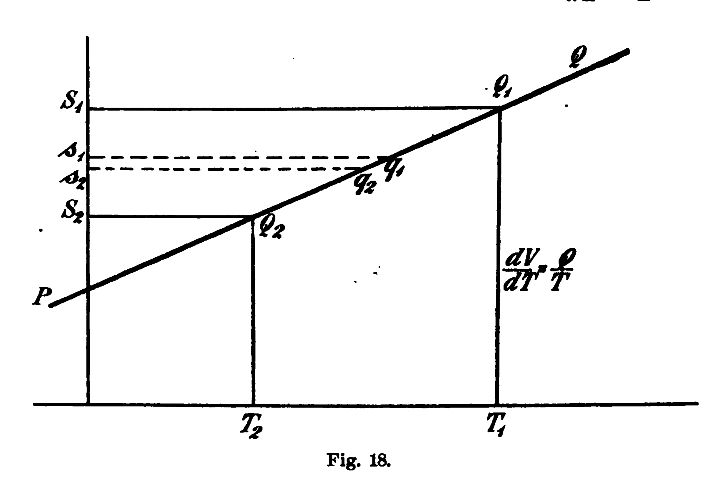


Fig. 18.

erhalten dann eine Gerade PQ. Befindet sich die warme Lötstelle auf der Temperatur T_1, so ist das Rechteck $T_1 Q_1 S_1 O$ gleich $T_1 \frac{dV}{dT} = Q_1$, es stellt also die bei dieser Temperatur aufgenommene Peltiersche Wärme dar. Ebenso stellt das Rechteck $T_2 Q_2 S_2 O$ die bei der unteren Temperatur abgegebene Peltierwärme dar, und diese sind zugleich das Maß für die elektromotorischen Kräfte an diesen Stellen. Aber auch die Größe der Thomsoneffekte ist aus der Figur zu ersehen. Da in Blei derselbe anscheinend gleich Null ist, also $q_2 = 0$, so haben wir nach unserer Theorie $q_1 = T \frac{d}{dT}\left(\frac{Q}{T}\right)$ und der gesamte Thomsoneffekt ist $\int_{T_2}^{T_1} q_1 \, dT$; wir haben also jedesmal die Größe $\frac{d}{dT}\left(\frac{Q}{T}\right)$, die durch $s_1 s_2$ dargestellt ist, mit T zu multiplizieren und alle so erhaltenen Flächen zu addieren. Mithin wird die Größe des Thomsoneffektes, wenn der Strom

im Kupfer von Q_1 nach Q_2 fließt, dargestellt durch die Fläche $Q_1 S_1 S_2 Q_2$, und zwar bedeutet sie, wenn diese Fläche von der Stromrichtung aus zur Rechten liegt eine Wärmeabgabe, bei entgegengesetzter Lage eine Absorption. Dadurch sind uns in der Figur die Größen aller Wärmeumwandlungen gegeben, und im besondern ist die in Stromenergie verwandelte Wärme durch die Fläche $T_1 Q_1 Q_2 T_2$ dargestellt.

§ 92. Tabelle von Tait.

Für irgend ein zweites Metall, z. B. Eisen, wird die charakteristische Gerade eine andere Lage haben, etwa $P' Q'$ (Fig. 19). Durch eine einfache Überlegung ist dann leicht zu

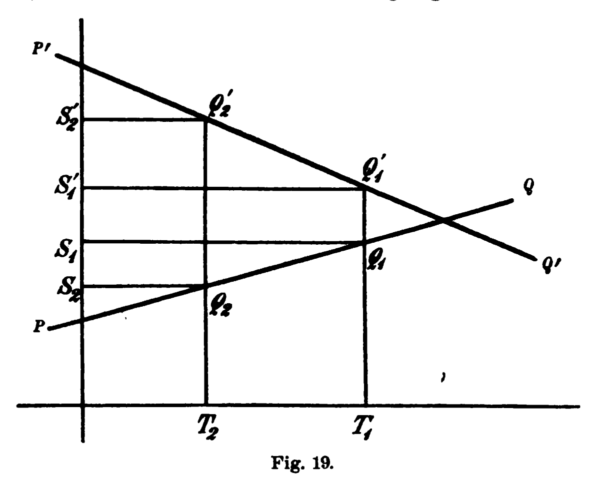


Fig. 19.

übersehen, daß dies Diagramm dann nicht nur den Wärmeumsatz beim Thermoelement Eisen-Blei darstellt, sondern daß zugleich die Lage der Linien für Kupfer und Eisen den Umsatz für das Thermoelement Kupfer-Eisen übersehen läßt. Bei diesem werden die Wärmemengen

$$Q_2 Q_1 S_1 S_2 + Q_1 Q_1' S_1' S_1 + Q_1' Q_2' S_2' S_1'$$

aufgenommen, dagegen $Q_2' S_2' S_2 Q_2$ abgegeben und $Q_1 Q_1' Q_2' Q_2$ in Stromenergie verwandelt. Der Kreuzungspunkt der Linien PQ und $P'Q'$ entspricht der neutralen Tempe-

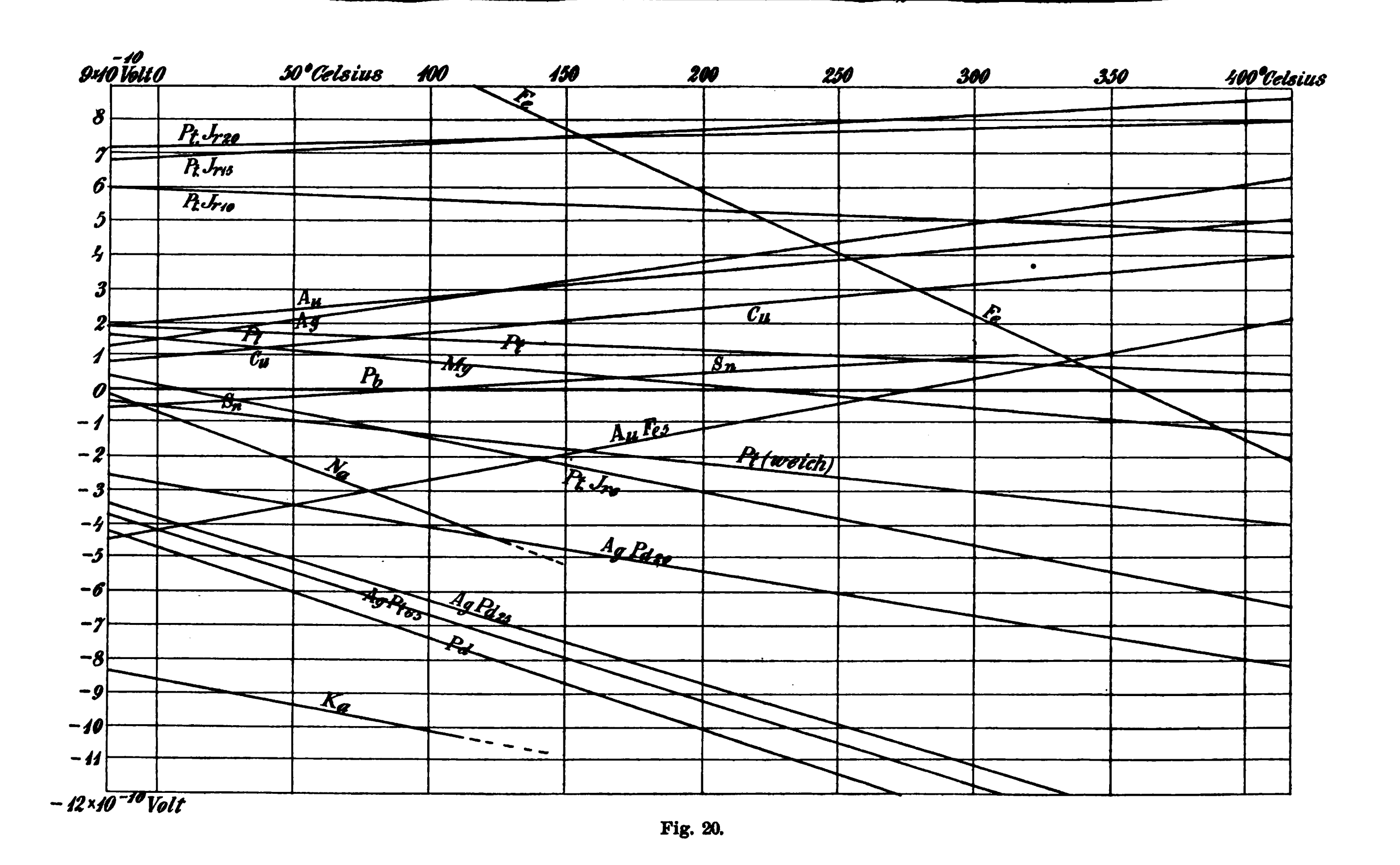
ratur für das Element *Cu/Fe*. Konstruieren wir für alle beliebigen Metalle die entsprechenden Geraden gegen Blei, so ergibt uns diese Darstellung unmittelbar ein Bild für die bei allen aus je zwei Metallen zu bildenden Thermoketten auftretenden Peltier- und Thomsoneffekte. Auch wenn Blei nicht den Thomsoneffekt Null hat, so behält diese Darstellung ihre theoretische Gültigkeit, indem wir dann alle Linien nur auf ein ideales Metall mit wirklich verschwindendem Thomsoneffekt beziehen müßten. Die folgende Figur 20 gibt eine Reihe derartiger Geraden nach den Versuchen von Tait, Knott und Mac Gregor.

Die Abszissen bedeuten die Temperaturen in Celsiusgraden, die Ordinaten sind die thermoelektrischen Kräfte gegen *Pb* in einer Einheit, die nahezu 10^{-10} Volt entspricht.

Alle Metalle, deren Geraden wie die des Eisens von links nach rechts geneigt sind, haben hiernach einen Thomsoneffekt in dem Sinne, daß beim Stromdurchgang von warm zu kalt eine Wärmeabsorption eintritt. Steigt die Gerade dagegen von links nach rechts, so tritt bei der gleichen Stromrichtung Wärmeentwickelung ein. Die Tatsache, daß beide Arten von Thomsoneffekten vorkommen, spricht gegen die Möglichkeit, diese Wärmebewegung zu vergleichen mit der Wärmeübertragung, die eintritt, wenn eine Flüssigkeit in einer Leitung von einer warmen zu einer kalten Stelle fließt. In diesem Falle würde offenbar die Flüssigkeit entsprechend ihrer spezifischen Wärme bei den geringeren Temperaturen Wärme abgeben, bei entgegengesetzter Strömungsrichtung würde sie entsprechend Wärme aufnehmen. Die beiden Arten von Thomsoneffekten würden uns zwingen, bei diesem Vergleich den Begriff einer negativen spezifischen Wärme auszubilden, damit verliert derselbe aber seinen Wert, und wir müssen sagen, daß der Vergleich des elektrischen Stromes mit einer strömenden Flüssigkeit für die Erscheinungen der Wärmeübertragung nicht mehr zutrifft; die Flüssigkeit ist jedenfalls kein Stoff im gewöhnlichen Sinne.

§ 93. Theorie von Kohlrausch.

Die abgeleitete Theorie der Thermoelektrizität beruhte auf der wahrscheinlichen Annahme, daß der Thomson- und



9×10⁻¹⁰ Volt 0
50° Celsius
100
150
200
250
300
350
400° Celsius
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12×10⁻¹⁰ Volt
Fe
Pt Jr20
Pt Jr15
Pt Jr10
Au
Ag
Pt
Cu
Mg
Sn
Pb
Au Fe5
Pt (weich)
Na
Pt Jr5
Ag Pd40
Ag Pt65
Ag Pd25
Pd
Ka

Fig. 20.

Peltiereffekt umkehrbare Vorgänge sind, und zieht ihre Schlüsse soweit, als diese Annahme zutrifft; F. Kohlrausch ist nun zu den gleichen Ergebnissen geführt, indem er an die Hypothese anknüpft, daß jeder Wärmestrom proportional seiner Stärke eine elektromotorische Kraft hervorruft, und auch umgekehrt jeder elektrische Strom einen Wärmestrom mit sich führt. Das Verhältnis, in welchem beide Stromarten verknüpft sind, ist für die verschiedenen Metalle verschieden, das heißt also: derselbe Strom führt in einem Metall mehr Wärme mit sich als im anderen, daher auch die Wärmeanhäufung oder der Wärmeschwund an den Lötstellen in Gestalt des Peltiereffektes. Diese Kohlrauschsche Theorie stellt eine interessante Vermittlung zwischen Wärme- und Elektrizitätsbewegung her, die durch das auffallende Parallelgehen von Wärmeleitung und Elektrizitätsleitung noch interessanter wird. Wenn auch die von Kohlrausch eingeführte Hypothese noch keine weitere Stütze durch andere Tatsachen gefunden hat, so sei sie doch hier noch kurz entwickelt, da sich auf diesem Gebiet noch nicht übersehen läßt, welche Vorstellungsweise schließlich die Oberhand gewinnen wird, und weil besonders dieser Gedankengang noch zu manchen neuen Fragestellungen und Versuchen anzuregen geeignet erscheint.

Es wird angenommen, durch das Flächenelement f gehe die Wärmemenge Q, und mit dieser Wärmebewegung sei eine Elektrizitätsbewegung verknüpft von der Größe aQ. Ein Cylinder über f von der Länge ds in der Richtung des Wärmestromes hat dann den elektrischen Leitungswiderstand $\frac{ds}{kf}$, wenn k das spezifische Leitvermögen des Materials ist. Die auf der Strecke ds wirkende elektromotorische Kraft, bezw. die durch den Wärmestrom bewirkte Potentialdifferenz an den Enden von ds ist dann

$$dV = \frac{aQ}{kf}\,ds.$$

Ist ferner $\varkappa$ das Wärmeleitungsvermögen und t die Temperatur, so ist

$$Q = -\varkappa f \frac{dt}{ds},$$

also
$$dV = -a\frac{\varkappa}{k}\frac{dt}{ds}ds,$$

oder wenn wir $a\frac{\varkappa}{k} = \vartheta$ setzen
$$\frac{dV}{ds} = -\vartheta\frac{dt}{ds}.$$

Die Größe ϑ drückt hier eine spezifische Eigenschaft der Substanz aus; sie braucht keine wirkliche Konstante zu sein, sondern es liegt nahe, anzunehmen, daß sie von der Temperatur abhängt; eine einfache Annahme ist es, $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 t$ zu setzen, wo nun ϑ_1 und ϑ_2 wirklich konstante Größen sind.

Berechnen wir jetzt die in einem aus zwei Metallen verlöteten Thermokreise herrschende gesamte elektromotorische Kraft, so erhalten wir dieselbe durch Integration über alle kleinen Abschnitte ds, und es wird, wenn ϑ und ϑ' die Werte für die beiden Metalle sind
$$V = -\int_{I}^{II}\vartheta\frac{dt}{ds}ds - \int_{II}^{I}\vartheta'\frac{dt}{ds}ds,$$
wo I und II die beiden Lötstellen bezeichnen. Da die Temperatur als Funktion von s darzustellen ist, so kann für $\frac{dt}{ds}ds$ einfach dt geschrieben werden, und es wird
$$V = -\int_{t_1}^{t_2}(\vartheta_1 + \vartheta_2 t)\,dt - \int_{t_2}^{t_1}(\vartheta_1' + \vartheta_2' t)\,dt,$$

folglich
$$V = (\vartheta_1 - \vartheta_1')(t_1 - t_2) + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_2'}{2}(t_1^2 - t_2^2).$$

Dies ist aber genau die von Avenarius empirisch gefundene Gleichung, wenn $\vartheta_1 - \vartheta_1' = b$ und $\frac{\vartheta_2 - \vartheta_2'}{2} = -c$ gesetzt wird, und damit ist der Anschluß dieser hypothetischen Vorstellungsweise an die Ergebnisse der Erfahrung sehr vollkommen erreicht.

Um nun auch noch die durch den Strom hervorgerufenen Wärmeerscheinungen herzuleiten, wird weiter angenommen, daß auch jeder elektrische Strom eine Wärmebewegung hervorruft. Geht der Strom i durch einen Leiter,

so führe er eine Wärmemenge mit sich proportional i und der Größe ϑ; es sei also die bewegte Wärmemenge $Q = C\vartheta i$, wo C jetzt ein einfacher Proportionalitätsfaktor sein soll, unabhängig von der Substanz. Es wird dann an einer Kontaktstelle in einem Draht die Wärmemenge $Q = C\vartheta i$ zum Kontakte hingeführt, und im anderen Draht $Q' = C\vartheta' i$ vom Kontakte fortgeführt; also wird $Q - Q' = C(\vartheta - \vartheta')i$ an der Kontaktstelle als Wärme frei werden, wenn $\vartheta > \vartheta'$, dagegen absorbiert werden, wenn $\vartheta < \vartheta'$ ist. Bei entgegengesetzter Stromrichtung wird die gleiche Wärmemenge absorbiert bezw. entwickelt. Befindet sich die Lötstelle auf anderer Temperatur, so ist auch die Wärmeentwickelung eine andere, da die ϑ von der Temperatur abhängen. Damit ist der Peltiereffekt genau dargestellt, denn auch die Größe der entwickelten Wärmemenge wird unter Berücksichtigung der Gleichung von Avenarius genau entsprechend den Peltierwärmen nach der gewöhnlichen Auffassung.

Befindet sich ferner ein homogener Draht mit seinen Enden auf den Temperaturen t_1 und t_2, so wirkt infolge des entstehenden Wärmestromes an den Enden des Längenelements ds nach obigem die elektromotorische Kraft

$$dV = -\vartheta \frac{dt}{ds} ds.$$

Geht also ein elektrischer Strom i durch den Draht in der Richtung von t_1 nach t_2, so wird derselbe im Längenelement noch die Energiemengen

$$i dV = -\vartheta i \frac{dt}{ds} ds = dQ$$

absorbieren müssen, die nach obigem i und dV gleichgerichtet sind. Durch Integration würden wir im ganzen Draht erhalten die Wärmemengen $Q = i\int_{t_2}^{t_1} \vartheta\, dt$, und das ist wieder genau der der Theorie im § 89 zu Grunde gelegte Ausdruck für den Thomsoneffekt, wenn q für ϑ geschrieben wird.

Damit ist diese Theorie von Kohlrausch mit allen Erfahrungstatsachen in Übereinstimmung gebracht und verlockt dadurch zu weiteren Spekulationen über die Verwandtschaft von strömender Wärme und strömender Elektrizität,

die ja in der auffallenden Parallelität von Wärme- und Elektrizitätsleitung einen weiteren Ausdruck findet. Daß besonders die Konstante C dieser Theorie von der Substanz unabhängig sein könne, drückt diese Verwandtschaft aus. Auf eine merkwürdige Konsequenz dieser Theorie sei nur noch hingewiesen; sie führt dazu, auch in einem gleichtemperierten Leiter, der von einem Strom durchflossen wird, einen Wärmestrom anzunehmen, das heißt, wenn anfangs keine Temperaturdifferenz vorhanden war, mußte der Strom eine solche erzeugen.

§ 94. Kontaktelektrizität.

Während die Theorie von Kohlrausch eine Verwandtschaft zwischen der Wärmebewegung und dem elektrischen Strom annimmt, hat man auch oftmals, besonders auch in den neueren elektrochemischen Werken, eine Verbindung zwischen den thermoelektrischen Kräften und der Kontaktelektrizität angenommen, doch kann diese Verbindung nur als durchaus unzulässig bezeichnet werden, wie bereits Clausius 1853 (Pogg. Ann. B. 90. S. 513 u. f.) eingehend abgeleitet hat. Unter Kontaktelektrizität versteht man die Erscheinung, die man bei elektroskopischen Versuchen bei hinreichender Empfindlichkeit immer wahrnehmen kann, daß nämlich zwei verschiedene sich berührende Metalle im allgemeinen eine Potentialdifferenz ihrer statischen Ladungen zeigen, die bei Zink-Kupfer etwa 1 Volt beträgt und bei Antimon-Wismut sehr gering ist. Diese Kontaktpotentiale wurden bereits in § 54 erwähnt und dort bei der Anwendungsweise des Quadrantelektrometers ein Weg zu ihrer Bestimmung nach Hallwachs angedeutet. Zuerst beobachtet wurden dieselben durch Volta, der sie durch Anwendung eines Kondensators in dem nach ihm benannten Voltaschen Fundamentalversuch zuerst nachwies. Am einwandfreiesten wurden dieselben durch W. Thomson gezeigt, der zwei Halbringe verschiedenen Metalles einseitig verlötete, während zwischen den anderen Enden der Metalle ein schmaler Luftspalt offen bleibt. (Siehe Fig. 21.) Hängt man in diesen Luftspalt oder dicht darüber das eine Ende einer Nadel eines Quadrantelektrometers, so erhält man bei

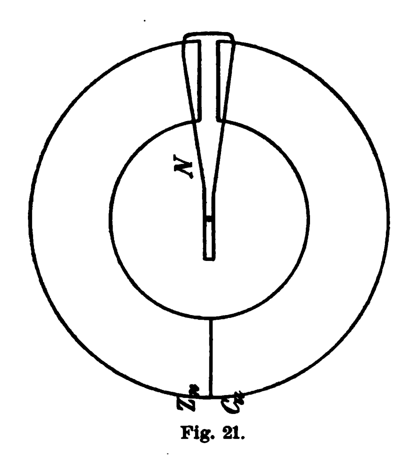


Fig. 21.

genau symmetrischer Aufhängung der Nadel, sobald man derselben ein hohes Potential von etwa 100 Volt erteilt, eine Ablenkung der Nadel, die bei Umkehrung des Nadelpotentials gleich weit nach der anderen Seite erfolgt. Daraus folgt, daß an den freien Enden der ungleichen Metalle in der Tat entgegengesetzte Ladungen sich befinden müssen. Führt man das Entstehen einer derartigen Potentialdifferenz nach Helmholtz auf eine ungleiche Anziehung zwischen der Substanz der Metalle und der Elektrizität zurück, so folgert Clausius, daß eine auf diese Weise bewirkte Potentialdifferenz keinen Peltiereffekt hervorrufen kann. Der Gedankengang dabei ist folgender: Nach der Vorstellung von Helmholtz entsteht an der Übergangsstelle von einem zum anderen Metall eine elektrische Doppelschicht, das heißt es steht eine Fläche mit positiver Ladung einer solchen mit negativer Ladung gegenüber. Daß sich beide nicht ausgleichen, wird eben durch Kräfte zwischen der Metallsubstanz und der Elektrizität verhindert. Ein Elektrizitätsquantum, das sich in der Übergangsschicht befindet, steht einmal unter der elektrischen Kraft der Doppelschicht und dann unter der ungleichen Anziehung der materiellen Substanzen und nimmt demnach im statischen Zustande eine bestimmte Ruhelage ein. Wird nun durch eine äußere elektromotorische Kraft ein Strom durch die Grenzschicht getrieben, so kommt eine neue elektrische Kraft zu der bereits vorhandenen hinzu, diese neue Kraft ist aber in der Übergangsschicht genau die gleiche, wie in den homogenen Teilen der Metalle, folglich ist auch ihre Arbeitsleistung hier wie dort genau die gleiche und es läßt sich aus der Helmholtzschen Auffassung nicht auf eine den Kontaktpotentialen entsprechende Peltierwärme schließen. Zu dem gleichen Schluß kommt auch Föppl in seiner in der Einleitung genannten Maxwellschen Theorie. Der Peltiereffekt hat also mit den etwa vorhandenen Kontakt-

potentialen nichts zu tun, sondern ist lediglich eine an den Ein- und Austritt der Wärme gebundene und nicht durch eine Wechselwirkung von Substanz und Elektrizität bewirkte Erscheinung.

Andererseits läßt sich nicht leugnen, daß immerhin für das erste Entstehen der Kontaktdifferenz ein Energieäquivalent gesucht werden muß. Bevor die Halbringe in Thomsons Anordnung sich berühren, mögen sie gleiches Potential haben und daher keine elektrische Anziehung auf einander ausüben. Ist die Berührung hergestellt, so besteht jetzt plötzlich eine solche Anziehung und das wieder Trennen derselben würde nun eine erhöhte Arbeitsleistung erfordern, als bei Zusammenführen gewonnen werden konnte. Das Äquivalent für diesen Gewinn an potentieller Energie kann nun nach Helmholtz nur gefunden werden in einer Änderung eines molekularen Spannungszustandes im Innern der Metallsubstanz. Es läßt sich freilich nicht leugnen, daß bisher von einer derartigen Energieform nichts bekannt ist, doch ist an sich kein Recht, die Unmöglichkeit einer solchen zu behaupten; es scheinen sogar vielleicht die neuesten Versuche Lenards über den Austritt von Elektronen aus Metallflächen in evakuierten Räumen auf derartige Beziehungen hinzuführen.

Von elektrochemischer Seite wird gegenwärtig den Kontaktpotentialen meist eine andere Deutung gegeben. Nach dieser Ansicht sind die Kontaktpotentiale überhaupt keine Differenzen der Potentiale der Metalle selbst, sondern nur der anliegenden Luftschichten; in Berührung befindliche Metalle stellen sich stets auf gleiches Potential. Sind die Metalle in Thomsons Versuch noch nicht in Berührung, so hat danach die Luftoberfläche überall noch gleiches Potential, die verschiedenen Metalle dagegen gegen Luft verschiedenes Potential je nach der ungleichen Verwandtschaft zwischen dem Luftsauerstoff und dem Metall. Tritt jetzt auf der einen Seite Berührung ein, so gleichen sich die Metallpotentiale aus und infolgedessen muß die nicht leitende Luft zu beiden Seiten des Spaltes an ihrer Oberfläche ungleiches Potential zeigen, und nur dieses wird beobachtet. Das Äquivalent des Arbeitsgewinnes liegt dann in einer geringen Oxydation des einen Metalles.

Es läßt sich nicht leugnen, daß auch diese Deutung allen sicher vorliegenden Erfahrungen genügen mag, aber als die einzig zulässige wird man sie erst bezeichnen dürfen, wenn gezeigt ist, daß frisch hergestellte, etwa im Vakuum durch Kathodenzerstäubung erzeugte Metallflächen in einer von Sauerstoff freien Atmosphäre eines indifferenten Gases, Wasserstoff oder Stickstoff, keine Kontaktdifferenz zeigen, die sofort auftritt, sobald Sauerstoff hinzukommen kann. Dieser Versuch steht jedoch zur Zeit noch aus.

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

